

**UNIJUI – UNIVERSIDADE REGIONAL DO NOROESTE DO  
ESTADO DO RIO GRANDE DO SUL**

**DeTec – Departamento de Tecnologia**

Curso de Engenharia Civil

Henardt Weber Klein

**OTIMIZAÇÃO DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO:  
DIMENSIONAMENTO A FLEXÃO**

Ijuí/RS  
2008

Henardt Weber Klein

**OTIMIZAÇÃO DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO:  
DIMENSIONAMENTO A FLEXÃO**

Trabalho de Conclusão de Curso de Engenharia Civil apresentado como requisito parcial para obtenção do grau de Engenheiro Civil.

Orientador: Prof. D.Sc. Marco Antonio Silva Pinheiro

Ijuí/RS  
2008

## **FOLHA DE APROVAÇÃO**

**Trabalho de conclusão de curso defendido e aprovado em sua forma final pelo professor orientador e pelos membros da banca examinadora.**

---

Prof. Marco Antonio Silva Pinheiro, D.Sc. – Orientador

Banca Examinadora

---

Prof. Marcelo Adriano Duart, M.Eng.  
UNIJUÍ/Detec

---

Prof. Luciano Pivoto Specht, Dr. Eng.  
UNIJUÍ/Detec

Dedico este trabalho aos meus pais, amigos  
e professores que me apoiaram nesta jornada.

## RESUMO

Uma preocupação que sempre esteve presente no meio profissional ou outras áreas é a redução de custos. Atualmente esta preocupação é muito intensa, devido também à preocupação ambiental, redução de recursos naturais dentre outros fatores. Os métodos de otimização podem proporcionar uma automatização destes fatores com vários benefícios econômicos. Na engenharia civil não é diferente. O dimensionamento de elementos estruturais, por exemplo, uma viga de concreto armado possui diversos arranjos que se pode escolher com um custo baixo, que atendem princípios básicos de segurança, com respeito aos estados limites de ruptura e de utilização e a imposições de normas técnicas. Este trabalho apresenta a otimização de custos de vigas submetidas à flexão, através do uso de algoritmos de busca direta e de algoritmos genéticos. Os principais resultados identificaram que os custos podem ser reduzidos dependendo do número de barras, da bitola utilizada, do tipo de concreto e aço utilizado e os parâmetros da viga como base e altura. Os melhores resultados para uma relação custo-desempenho foram apresentados pelas vigas do tipo bi-engastada. Os resultados obtidos do método direto de otimização foram melhores que os do algoritmo genético.

Palavras chave: otimização, estruturas, vigas, otimização de vigas, estruturas de concreto, custos de vigas.

## LISTA DE FIGURAS

Fig. 1a: Viga retangular sob ação de flexão simples.....	18
Fig. 1b: Estádios de fissuração.....	18
Fig. 1c: Viga retangular de concreto- estágio II.....	19
Fig. 2a,b: Gráfico $\sigma / \varepsilon$ .....	19
Fig. 2c,d: Gráfico $\sigma / \varepsilon$ .....	20
Fig. 3: Corte transversal, viga. ....	21
Fig. 4: Corte transversal, viga. ....	21
Fig. 5: Diagrama carga – deformação. ....	22
Fig. 6: Ruptura de uma viga contínua de dois vãos, submetidas a cargas concentradas... 24	
Fig. 7: Figura esquemática, estado limite último atingido – ruína da estrutura. ....	27
Fig. 8a: Estado limite de serviço atingido – Trincas na alvenaria de vedação.....	28
Fig. 8b: Estado limite de serviço atingido – Mau funcionamento da edificação.....	28
Fig. 9: Ações atuantes em um edifício. ....	29
Fig. 10: Modelo Método Aproximado +Vigas contínuas.....	32
Fig. 11: Modelo Vigas + Pilares.....	32
Fig. 12: Modelo grelha somente de vigas.....	33
Fig. 13: Modelo de grelha de vigas e lajes.....	34
Fig. 14a: Modelo estrutural Pórtico Plano.....	35
Fig. 14b: Elemento linear com 3 graus de liberdade e suas ações.....	35
Fig. 15a: Representação do Pórtico Espacial. ....	36
Fig. 15b: Representação da barra espacial. ....	36
Fig. 16: Representação de elementos finitos. ....	37
Fig. 17: Representação gráfica dos pontos de mínimos locais e globais de uma função....	48
Fig. 18: Aplicabilidade em Problemas x Eficiência de Resolução dos Métodos.....	49
Fig. 19: Algoritmo Genético Genérico. ....	52
Fig. 20: Representação do operador cruzamento. ....	54
Fig. 21: Representação do operador mutação.....	54
Fig. 22: Fluxograma algoritmo genético. ....	55
Fig. 23: Representação esquemática de corte de barras longitudinais.....	59
Fig. 24: Representação esquemática da viga bi-apoiada. ....	64

Fig. 25: Variação do custo com em função do As e altura, bw=15cm.....	64
Fig. 26: Variação do As com a altura, bw=15cm. ....	65
Fig. 27: Variação do custo com versus As, bw=15cm. ....	65
Fig. 28: Variação do custo com a altura, bw=15. ....	66
Fig. 29: Variação do custo versus eficiência, bw= 15cm. ....	66
Fig. 30: Variação do custo em função do As e altura, bw= 20cm. ....	69
Fig. 31: Representação esquemática da viga apoiada e engastada. ....	71
Fig. 32: Variação do custo com a altura, bw= 15cm. ....	72
Fig. 33: As positiva vs Altura, bw= 15cm. ....	72
Fig. 34: As negativa vs Altura, bw= 15cm. ....	73
Fig. 35: As positiva vs As negativa, bw= 15cm. ....	73
Fig. 36: Custo vs eficiência, bw= 15cm. ....	74
Fig. 37: Variação do custo em função da altura, bw= 15cm. ....	76
Fig. 38: Representação esquemática da viga bi-engastada. ....	78
Fig. 39: Custo vs Altura, bw= 15cm. ....	79
Fig. 40: As positiva vs Altura, bw= 15cm. ....	79
Fig. 41: As negativa vs Altura, bw= 15cm. ....	80
Fig. 42: As positiva vs As negativa, bw= 15cm. ....	80
Fig. 43: Custo vs eficiência, bw= 15cm. ....	81
Fig. 44: Variação do custo em função da altura, bw= 20. ....	83
Fig. 45: Variação do h versus a geração. ....	86
Fig. 46: Variação do custo versus a geração. ....	86

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Valores de $k_6$ e $k_3$ para cálculo do $A_s$ .....	40
Tabela 2: Mínimos custos com seus respectivos dimensionamentos $q= 10\text{kN/m}$ .....	67
Tabela 3: Mínimos custos com seus respectivos dimensionamentos $q= 20\text{kN/m}$ .....	67
Tabela 4: Mínimos custos com seus respectivos dimensionamentos $q= 40\text{kN/m}$ .....	68
Tabela 5: Mínimos custos com seus respectivos dimensionamentos $q= 80\text{kN/m}$ .....	68
Tabela 6: Mínimos custos com seus respectivos dimensionamentos $q= 10\text{kN/m}$ .....	69
Tabela 7: Mínimos custos com seus respectivos dimensionamentos $q= 20\text{kN/m}$ .....	70
Tabela 8: Mínimos custos com seus respectivos dimensionamentos $q= 40\text{kN/m}$ .....	70
Tabela 9: Mínimos custos com seus respectivos dimensionamentos $q= 80\text{kN/m}$ .....	70
Tabela 10: Mínimos custos com seus respectivos dimensionamentos $q= 10\text{kN/m}$ .....	74
Tabela 11: Mínimos custos com seus respectivos dimensionamentos $q= 20\text{kN/m}$ .....	75
Tabela 12: Mínimos custos com seus respectivos dimensionamentos $q= 40\text{kN/m}$ .....	75
Tabela 13: Mínimos custos com seus respectivos dimensionamentos $q= 80\text{kN/m}$ .....	75
Tabela 14: Mínimos custos com seus respectivos dimensionamentos $q= 10\text{kN/m}$ .....	76
Tabela 15: Mínimos custos com seus respectivos dimensionamentos $q= 20\text{kN/m}$ .....	77
Tabela 16: Mínimos custos com seus respectivos dimensionamentos $q= 40\text{kN/m}$ .....	77
Tabela 17: Mínimos custos com seus respectivos dimensionamentos $q= 80\text{kN/m}$ .....	77
Tabela 18: Mínimos custos com seus respectivos dimensionamentos $q= 10\text{kN/m}$ .....	81
Tabela 19: Mínimos custos com seus respectivos dimensionamentos $q= 20\text{kN/m}$ .....	82
Tabela 20: Mínimos custos com seus respectivos dimensionamentos $q= 40\text{kN/m}$ .....	82
Tabela 21: Mínimos custos com seus respectivos dimensionamentos $q= 80\text{kN/m}$ .....	82
Tabela 22: Mínimos custos com seus respectivos dimensionamentos $q= 10\text{kN/m}$ .....	83
Tabela 23: Mínimos custos com seus respectivos dimensionamentos $q= 20\text{kN/m}$ .....	84
Tabela 24: Mínimos custos com seus respectivos dimensionamentos $q= 40\text{kN/m}$ .....	84
Tabela 25: Mínimos custos com seus respectivos dimensionamentos $q= 80\text{kN/m}$ .....	84



## SIMBOLOGIA

AG	- Algoritmo Genético
As	- Seção da armadura de tração
bw	- Base da viga
CA	- Concreto Armado
cm	- Unidade de medida (centímetro)
d	- Distância do centro de gravidade da armadura até a fibra mais comprimida
E	- Módulo de Elasticidade
$e$	- Espaçamento
$\varepsilon$	- Deformação
E.I	- Rigidez
ELS	- Estado Limite de Serviço
ELU	- Estado Limite Último
F	- Variável de otimização
$f_{bd}$	- Resistência de aderência de cálculo da armadura passiva
$f_{ck}$	- Resistência característica do concreto
$f_{cd}$	- Resistência de cálculo do concreto
$f_{ctd}$	- Tensão limite de tração do concreto
$F_d$	- Valor de cálculo da ação
$F_k$	- Valor característico da ação
$f_{yd}$	- Resistência de cálculo do aço
$f_{yk}$	- Resistência de escoamento do aço
$f, g_i, h_j$	- Funções escalares estimadas
I	- Momento de Inércia
kgf	- Quilograma força
L	- Vão livre
$l_b$	- Comprimento de ancoragem
M	- Momento fletor
$M_d$	- Momento fletor de cálculo
MPa	- Unidade de resistência (Mega Pascal)
MUC	- Momento Último de Compressão

$n_1, n_2, n_3$	- Coeficientes para cálculo da tensão de aderência da armadura passiva
$\rho$	- Taxa de armadura
Rd	- Resistência de cálculo
S	- Área
Sd	- Solicitação de cálculo
$\int$	- Integral
$\sigma$	- Tensão
$\phi$	- Bitola do aço
$x_1, x_2, \dots, x_n$	- Variáveis que o algoritmo procura otimizar
$\gamma_f$	- Coeficiente de ponderação das ações

# SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO .....</b>	<b>13</b>
1.1 – Tema da Pesquisa .....	13
1.2 – Delimitação do Tema .....	13
1.3 – Formulação da Questão de Estudo .....	13
1.4 – Definição dos Objetivos .....	13
1.4.1 – Objetivo Geral .....	13
1.4.2 – Objetivos Específicos .....	13
1.5 – Justificativas .....	14
1.6 – Proposta de Sistematização .....	14
<b>2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....</b>	<b>16</b>
2.1 – CONCRETO .....	16
2.2 – AÇO .....	16
2.3 – CONCRETO ARMADO .....	17
2.3.1 – Aderência Entre Aço e Concreto .....	17
2.3.2 – Módulo de Elasticidade .....	19
2.3.3 – Momento de Inércia .....	20
2.3.4 – Rigidez a Flexão e Deformação .....	22
2.4 – ESTRUTURAS DE CONCRETO .....	23
2.4.1 – Vigas .....	23
2.4.2 – Vigas Contínuas .....	23
2.4.3 – Pilares .....	24
2.4.4 – Tirantes .....	25
2.4.5 – Arcos .....	25
2.5 – AÇÕES .....	25
2.5.1 – Ações permanentes .....	25
2.5.2 – Ações variáveis .....	26
2.5.3 – Coeficientes de ponderação .....	26
2.5.4 – Estados limites .....	27
2.5.5 – Combinações das Ações em Estruturas de CA.....	29

2.5.6 – Combinações das Ações .....	29
2.5.7 – Combinações Últimas .....	29
2.5.8 – Combinações de Serviço .....	30
2.6 – ANÁLISE ESTRUTURAL .....	30
2.6.1 – Modelos Estruturais .....	30
2.6.2 – Combinações de Modelos Estruturais .....	37
2.6.3 – Tipos de Análise Estrutural .....	37
2.7 – DIMENSIONAMENTO .....	38
2.7.1 – Objetivos .....	38
2.7.2 – Verificação de ruptura a compressão .....	39
2.7.3 – Taxa de armadura para vigas a flexão simples .....	39
2.7.4 – Distribuição das armaduras nas vigas .....	41
2.7.5 – Cobrimento da armadura .....	42
2.7.6 – Dimensões limites para vigas .....	43
2.7.7 – Deslocamentos limites .....	43
2.8 – OTIMIZAÇÃO .....	45
2.8.1 – Algoritmos Genéticos .....	46
2.8.2 – Diferença entre os Algoritmos Genéticos e os Métodos Clássicos .....	49
2.8.3 – Vantagens e desvantagens dos AGs .....	50
2.8.3.1 – Vantagens .....	50
2.8.3.2 – Desvantagens .....	51
2.8.4 – Critérios de parada .....	52
2.8.5 – Representação e Codificação .....	52
2.8.6 – População Inicial .....	53
2.8.7 – Reprodução .....	53
2.8.8 – Cruzamento .....	53
2.8.9 – Mutação .....	54
2.8.10 – Estruturas dos Algoritmos Genéticos .....	55
2.8.11 – Discussão .....	56
<b>3. – METODOLOGIA .....</b>	<b>57</b>
3.1 – Classificação do Estudo .....	57
3.2 – Procedimento de modelagem .....	57
3.3 – Materiais e/ou Equipamentos utilizados na pesquisa .....	61

3.3.1 – Descrição do Software MATLAB .....	62
3.4 – Plano de Análise e Interpretação de Dados .....	62
<b>4. – ANÁLISE DOS RESULTADOS .....</b>	<b>63</b>
4.1 – MÉTODO DE BUSCA DIRETA.....	63
4.1.1 – Viga bi-apoiada .....	64
4.1.2 – Viga apoiada e engastada .....	71
4.1.3 – Viga bi-engastada .....	78
4.2 – ALGORITMOS GENÉTICOS .....	85
<b>5. – CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>87</b>
5.1 – CONCLUSÕES.....	87
5.2 – SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	88
<b>6. - REFERÊNCIAS.....</b>	<b>89</b>

# 1. INTRODUÇÃO

## 1.1 – Tema da Pesquisa

O tema desta pesquisa é otimização de estruturas.

## 1.2 – Delimitação do Tema

Limita-se a investigar a otimização de estruturas (vigas sujeitas à flexão) de concreto armado utilizando busca direta e algoritmos genéticos (formulação clássica).

## 1.3 – Formulação da Questão de Estudo

Quais são as seções de concreto armado que oriundam mínimos custos para uma estrutura que satisfaça princípios básicos de segurança, com respeito aos estados limites de ruptura e de utilização, e a imposições de normas técnicas?

## 1.4 – Definição dos Objetivos

### 1.4.1 – Objetivo Geral

Minimizar seções de concreto e área de aço, conseqüentemente ou provavelmente, obter custos mínimos.

### 1.4.2 – Objetivos Específicos

- Implementar uma técnica de otimização via busca direta e algoritmos genéticos;
- Identificar esforços e deformações resultantes da análise otimizada;

## 1.5 – Justificativas

Nos dias de hoje, as empresas estão cada vez mais competitivas, sendo assim uma importante e inevitável estratégia a ser atingida é a obtenção de produtos com menor custo. Um dos caminhos que pode ser seguido, entre um ramo de possibilidades é a otimização estrutural.

O homem inspirado na natureza encontrou maneiras de melhorar sua qualidade de vida. Alguns exemplos são os aviões baseados nos pássaros, submarinos baseados nos peixes, sonares em morcegos e entre outros. Dentro deste tema, entram os algoritmos genéticos como ferramenta de otimização, baseados na teoria da seleção natural de Charles Darwin, o qual iniciou seus primeiros estudos em meados do século XIX. O avanço da programação matemática e computacional possibilitou o surgimento dos algoritmos genéticos no século XX. Dependendo do problema, os algoritmos genéticos são superiores a busca direta, uma outra técnica de otimização.

O concreto, um dos principais materiais que movem a construção civil, é um produto largamente empregado e utilizado no mundo. Para sua composição final há um grande consumo de energia. Em função disso, deve-se utilizá-lo de forma racional. Observa-se então, a sua grande importância para a sociedade.

Os softwares comerciais partem de um pré-dimensionamento, cabendo ao engenheiro, por experiência própria, escolher por tentativa e erro o projeto que lhe parecer mais econômico, visto que existe uma vasta gama de soluções de estrutura que atendam as normas técnicas.

Por isso, além das demais justificativas acima citadas, deve-se incentivar os pesquisadores e engenheiros a fazer uma análise aprofundada de estruturas.

É neste contexto que entram os métodos de otimização, que podem proporcionar uma automatização de diversos processos com vários benefícios econômicos.

## 1.6 – Proposta de Sistematização

No primeiro capítulo, constam os dados introdutórios referentes ao projeto de pesquisa, onde é definido o tema, a questão em estudo, os objetivos e justificativas para elaboração deste trabalho.

O segundo capítulo traz uma revisão bibliográfica referente aos temas a serem abordados neste trabalho, definindo alguns pontos sobre concreto armado e ainda a questão da utilização de algoritmos genéticos e busca direta na otimização estrutural.

O terceiro capítulo apresenta a metodologia a ser utilizada no decorrer da pesquisa, desde os equipamentos utilizados, a modelagem matemática e computacional, a comparação de custos e eficiência das estruturas.

O quarto capítulo deste trabalho fará uma abordagem sobre os resultados encontrados, fazendo sua interpretação.

O quinto capítulo apresenta as conclusões obtidas após a análise dos resultados, definindo reais diferenças entre custos das comparações feitas no estudo e apresentando sugestões para trabalhos futuros.



## 2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 2.1 – CONCRETO

O concreto é um aglomerado constituído de agregados e cimento como aglutinante; é portanto uma rocha artificial.

A fabricação do concreto é feita pela mistura dos agregados com cimento e água, a qual conforme necessidade, aditivos são acrescentados, que influenciam as características físicas e químicas do concreto fresco ou endurecido. O concreto fresco é moldado em formas e adensado com vibradores. O endurecimento do concreto começa após poucas horas e, de acordo com o tipo de cimento, atinge aos 28 dias cerca de 60 a 90% de sua resistência.

O cimento é obtido aquecendo-se calcário e argila até a sinterização. Depois se mói a mistura até obter-se um produto de textura fina. Os cimentos, como aglomerantes hidráulicos determinam, antes de tudo, as características do concreto.

Para os agregados que compõem o concreto podem ser utilizados materiais naturais e/ou artificiais, que apresentam resistência suficiente e que não afetem o endurecimento do concreto. Os agregados devem, por isso, ser isentos de impurezas (terra, argila, húmus) e de componentes prejudiciais (no máximo 0,02% de cloretos e 1% de sulfatos). O açúcar é especialmente perigoso, porque impede a pega do cimento.

A forma dos grãos e a conformação superficial influenciam muito a trabalhabilidade e as propriedades de aderência do concreto: agregados redondos e lisos facilitam a mistura e o adensamento do concreto; agregados com superfícies ásperas aumentam a resistência à tração (LEONHARDT e MÖNNING, 1977).

### 2.2 – AÇO

Os aços existentes no mercado dividem-se em dois tipos (BOTELHO e MARCHETTI, 2006)

- √ Tipo A – Laminados a quente;
- √ Tipo B – Trefilação de fios máquina.

Além da divisão em tipos A e B, os aços são divididos em categorias que são funções principais dos seus teores de carbono, disso resultando as categorias: CA 25, CA 50 e CA 60. Cada categoria é indicada pelo código CA (aço de concreto armado) e pelo número indicativo. As tensões do aço estão mostradas no Quadro 1 a seguir:

Quadro 1: Tensões do aço  
Fonte: Botelho e Marchetti (2006)

Categoria	Tensão de escoamento mínimo ou valor característico $f_{yk}$ (MPa)	Tensão para a qual ocorre a deformação de 0,2% $\sigma_{sd}$ (MPa)	Tensão de cálculo $f_{yd}$ (MPa)
CA 25	250	215,0	215,0
CA 50A	500	420,0	435,0
CA 60B	600	400,0	521,7

## 2.3 – CONCRETO ARMADO

Por concreto armado, entende-se o concreto com barras de aço imersas nele, pois é um material de construção composto, no qual a ligação entre o concreto e a armadura de aço é devida a aderência do cimento e a efeitos de natureza mecânica. As barras da armadura devem absorver os esforços de tração que surgem nas peças submetidas à flexão ou a tração, já que o concreto possui alta resistência a compressão, porém pequena resistência a tração (LEONHARDT e MÖNNING, 1977).

### 2.3.1 – Aderência Entre Aço e Concreto

De acordo com Leonhardt e Mönnig (1977), o concreto armado deve suas boas características de material de construção à aderência entre o concreto e as barras da armadura. Através da aderência, garante-se que as barras da armadura, como um todo, apresentam um alongamento igual as das fibras do concreto que as envolvem. Tendo em vista que o alongamento a tração do concreto é pequeno, o concreto fissa na presença de maiores

solicitações de tração, e as barras da armadura devem então absorver as forças de tração. A aderência deve ser desenvolvida de modo que a abertura das fissuras permaneça pequena. O CA apresenta três estádios:

**Estádio Ia** – o concreto não está fissurado na zona tracionada e absorve as forças de tração; as tensões de flexão podem ser calculadas pelo momento de inércia da seção ideal, o concreto resiste a tração em regime elástico linear.

**Estádio Ib** – o concreto resiste às tensões em regime plástico.

**Estádio II** – o concreto está bastante fissurado na zona tracionada; as forças de tração devem ser totalmente absorvidas pela armadura. A seção efetiva é constituída apenas pela zona de compressão e pelas barras de aço.

**Estádio III** – chamado também de Estádio de Ruptura, o concreto está na iminência de ruptura à compressão. Esta pode ocorrer por escoamento do aço ou esmagamento do concreto.

As Figuras 1 (a, b, c) mostram um exemplo de uma viga retangular sob flexão simples, e seus estádios.

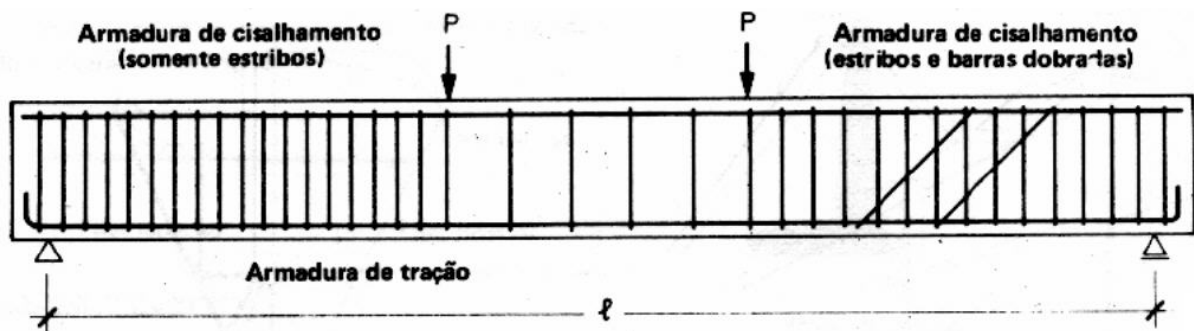


Figura 1a: Viga retangular sob ação de flexão simples.  
Fonte: Adaptado de Leonhardt e Mönning (1977)

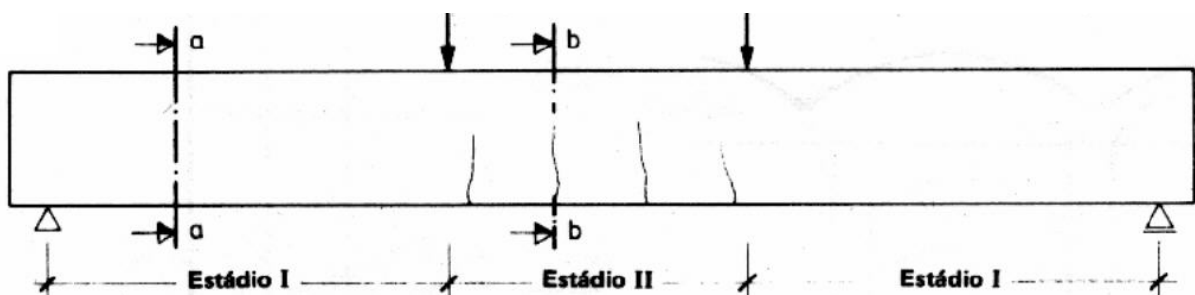


Figura 1b: Estádios de fissuração.  
Fonte: Adaptado de Leonhardt e Mönning (1977)

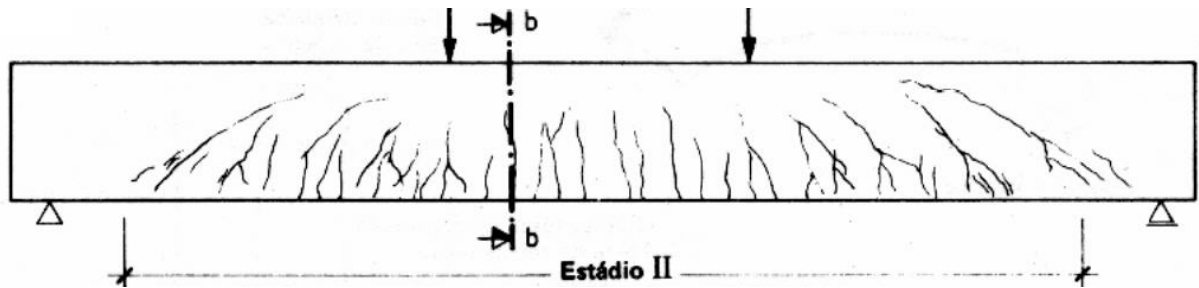


Figura 1c: Viga retangular de concreto- estágio II.  
Fonte: Adaptado de Leonhardt e Mönning (1977)

### 2.3.2 – Módulo de Elasticidade

Os diagramas tensão-deformação como mostrado na Figura 2 (a,b,c, d), para a maioria dos materiais da engenharia, apresentam relação linear entre tensão e deformação na região de elasticidade. Conseqüentemente, um aumento na tensão provoca um aumento proporcional na deformação. Esse fato, descoberto por Robert Hooke em 1676, com o auxílio de molas, é conhecido como lei de Hooke (HIBBELER, 2004).

Matematicamente tal lei é expressa por:

$$\sigma = E.\varepsilon$$

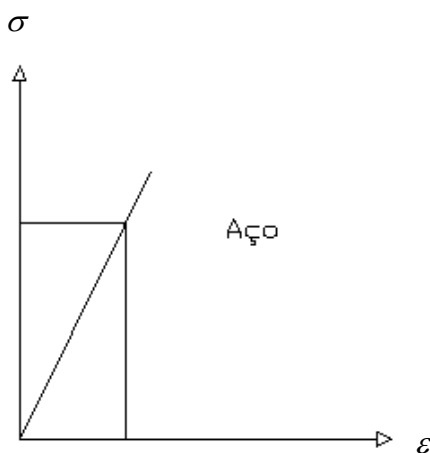


Figura 2.a: Gráfico  $\sigma / \varepsilon$   
Fonte: Adaptado de Botelho e Marchetti (2006)

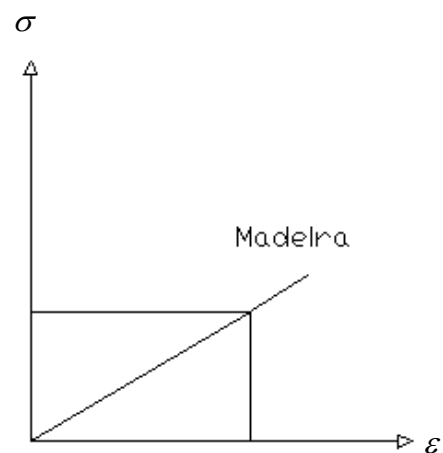


Figura 2.b: Gráfico  $\sigma / \varepsilon$   
Fonte: Adaptado de Botelho e Marchetti (2006).

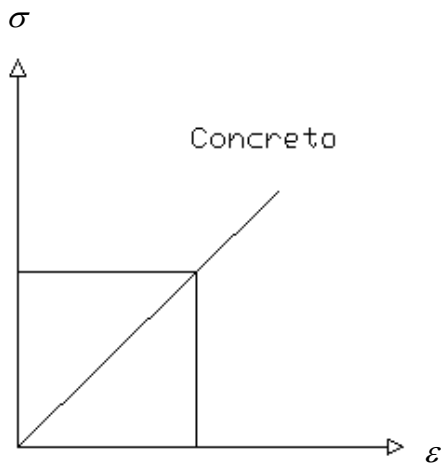


Figura 2.c: Gráfico  $\sigma / \varepsilon$   
 Fonte: Adaptado de Botelho e Marchetti (2006)

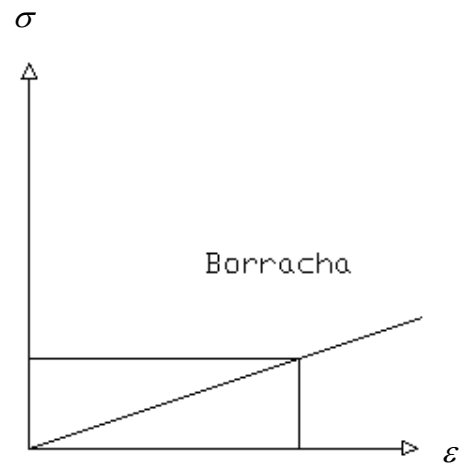


Figura 2.d: Gráfico  $\sigma / \varepsilon$   
 Fonte: Adaptado de Botelho e Marchetti (2006).

Observamos a seguir alguns valores do módulo de elasticidade E no Quadro 2 abaixo:

Quadro 2: Valores característicos de E  
 Fonte: Adaptado de Botelho e Marchetti (2006).

Material	E		
	Kgf/cm <sup>2</sup>	kN/cm <sup>2</sup>	MPa
Aço	2.100.000	21.000	210.000
Concreto*	250.400	2.504	25.040
Madeira (carvalho)	100.000	1.000	10.000
Borracha	10	0,1	1

\* O valor de E do concreto é para referência, já que ele varia com a qualidade do concreto.

### 2.3.3 – Momento de Inércia

Massas longe do centro funcionam melhor a flexão. Se duas vigas possuem igual momento fletor, mesma forma e material, o que diferencia uma da outra é sua disposição como mostrado na Figura 3.

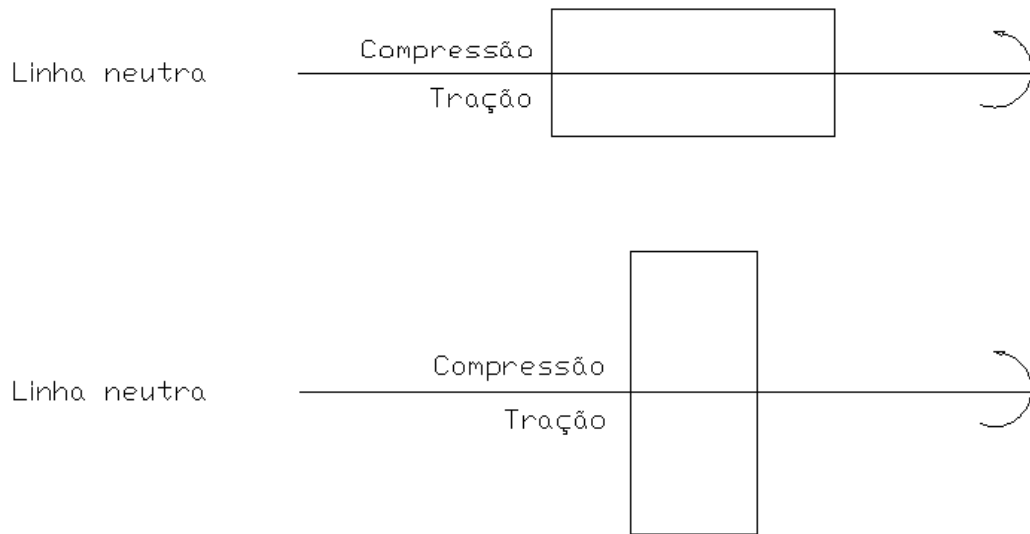


Figura 3: Corte transversal, viga  
 Fonte: Adaptado de Botelho e Marchetti (2006)

Segundo Botelho e Marchetti (2006), a tensão de tração ou compressão de um ponto qualquer de uma seção da barra é função do Momento Fletor, da distância do ponto ao eixo da barra ( $X$ ) (linha neutra), e do Momento de Inércia ( $I$ ), que mede o afastamento das áreas em relação a um eixo que passa pelo centro da figura.

Como mostrado na Figura 4:

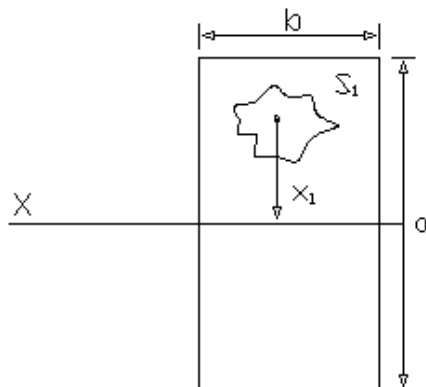


Figura 4: Corte transversal, viga.  
 Fonte: Adaptado de Botelho e Marchetti (2006)

Seja  $S_1$  a área de um pequeno trecho, e  $x_1$  a distância dessa área ao eixo X. Calculemos a soma de todos os elementos da área ( $S_1, S_2, \dots, S_n$ ) multiplicados cada um pelo quadrado de sua distância, em relação ao eixo X.

Dessa forma obtém-se:

$$I = \int_S x^2 ds$$

O Momento de Inércia (I) é tabelado para algumas figuras geométricas principais.

### 2.3.4 – Rigidez a Flexão e Deformação

Para Leonhardt e Mönning (1977), numa viga de ensaio, o desenvolvimento da deformação (flecha) no meio do vão, em função da carga P é mostrada na Figura 5, a seguir:

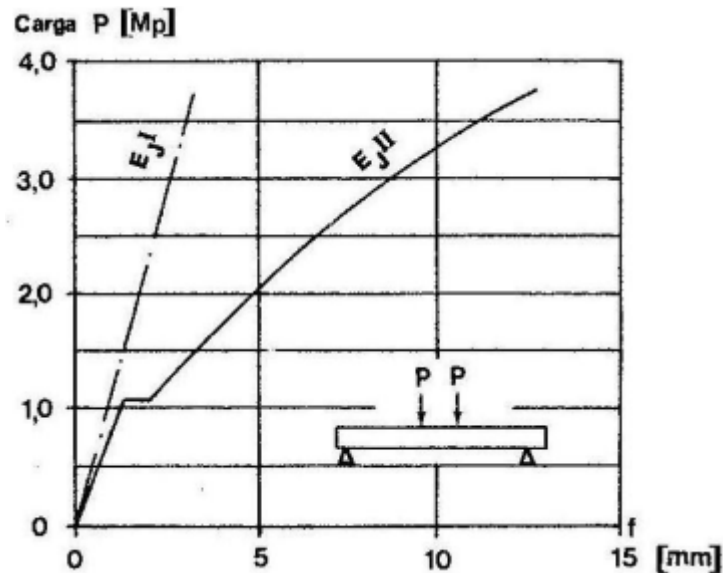


Figura 5: Diagrama carga-deformação de um ensaio em uma viga de um único vão com seção retangular.  
Fonte: Leonhardt e Mönning (1977)

No estágio I, a deformação permanece pequena e corresponde exatamente ao valor teórico, que, com a rigidez a flexão  $E.I'$ , foi calculado com base nos valores da seção transversal ideal. Logo que aparecem as primeiras fissuras, as deformações aumentam com maior rapidez.

Com o término da formação das fissuras e com carga repetida, o gráfico apresenta um novo traçado, quase retilíneo, que corresponde a uma rigidez a flexão  $E.I''$ . No estágio II portanto, a viga também se comporta quase elasticamente, e as deformações podem ser calculadas com  $E.I''$ , através da teoria da elasticidade, considerando a seção transversal efetiva no estágio II.

A relação entre os valores da rigidez nos estádios I e II depende principalmente da percentagem de armadura  $\rho$ : quanto maior for  $\rho$ , tanto maior a zona de compressão remanescente no estágio II e, conseqüentemente a rigidez  $E.I''$ .

## **2.4 – ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO**

### **2.4.1 – Vigas**

Vigas são elementos estruturais projetados para suportar carregamentos aplicados perpendicularmente ao seu eixo longitudinal. Devido ao carregamento, as vigas desenvolvem força cortante interna e momento fletor que, em geral, variam de ponto para ponto ao longo do eixo. Algumas vigas também estão sujeitas a uma força axial interna; entretanto, os efeitos dessa força muitas vezes são desprezados no projeto, pois a tensão axial geralmente é muito menor que as tensões desenvolvidas por cisalhamento e flexão (HIBBELER, 2004).

### **2.4.2 – Vigas Contínuas**

Leonhardt e Mönning (1977) afirmam que, em vigas de vários vãos têm-se, além de momentos positivos, momentos negativos. Quanto à flexão e força cortante, manifesta-se o mesmo comportamento que o de vigas de um único vão. A Figura 6 mostra a configuração de ruptura de uma viga contínua:



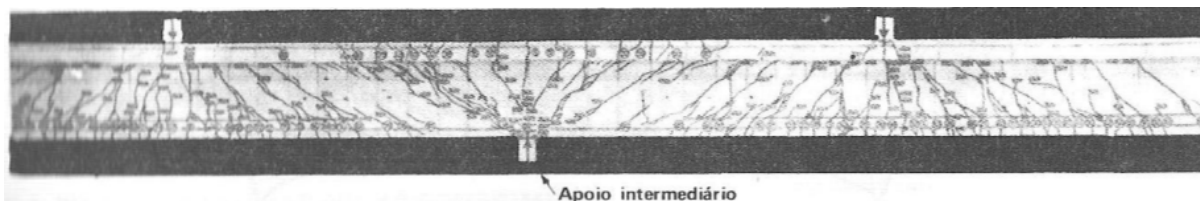


Figura 6: Configuração de ruptura de uma viga contínua de dois vãos, submetidas a cargas concentradas.  
Fonte: Leonhardt e Mönning (1977)

Sobre o apoio intermediário formam-se as primeiras fissuras, porque o momento negativo no apoio é maior do que os momentos positivos no vão. Devido a isso, a rigidez nesse ponto (Estádio II) diminui muito em relação aquela do vão (Estádio I), de modo que a viga para o posterior carregamento em toda sua extensão possui momentos de inércia diferentes. Como consequência os momentos nos vãos aumentam com maior rapidez do que o momento no apoio, até que, as fissuras de flexão nos vãos causem também o surgimento do Estádio II. As fissuras de flexão na região de apoio, em decorrência das tensões principais e trações inclinadas aí existentes, produzidas por forças cortantes elevadas, inclinam-se obliquamente em direção ao apoio. Penetram na viga em profundidade maior do que no caso de flexão pura, o que acarreta uma altura menor da zona de compressão do que nos trechos em que a força cortante não atua.

Estes fenômenos causam a “redistribuição de momentos” do apoio para o vão, menor aproveitamento da armadura de flexão no apoio e maior perigo de ruptura por força cortante nas regiões dos apoios. Por outro lado, revela-se aqui a propriedade freqüentemente favorável das construções hiperestáticas: podem transferir forças de zonas altamente solicitadas para zonas menos solicitadas.

### 2.4.3 – Pilares

Os pilares são elementos lineares verticais, com eixo reto e considerado com seção constante ao longo da altura. Estes são dimensionados a esforços de flexo-compressão reta ou oblíqua.

Segundo NBR 6118 (2003), os pilares são elementos lineares de eixo reto, usualmente disposto na vertical, em que as forças normais de compressão são preponderantes.

#### **2.4.4 – Tirantes**

A NBR 6118 (2003) classifica-os como elementos lineares em que as forças normais de tração são preponderantes.

#### **2.4.5 – Arcos**

A NBR 6118 (2003) classifica os arcos como elementos lineares curvos em que as forças normais de compressão são preponderantes, agindo ou não simultaneamente com esforços solicitantes de flexão, cujas ações estão contidas em seu plano.

### **2.5 – AÇÕES**

Em uma análise estrutural devem ser consideradas todas as ações que irão produzir efeitos significativos na estrutura. Tais ações não são necessariamente cargas externas aplicadas diretamente. Podem ser, por exemplo, característica do material (concreto armado), ou da construção da estrutura, que geram esforços adicionais (KIMURA, 2007).

As ações são classificadas em dois grupos principais: ações permanentes e ações variáveis.

O peso específico considerado para o concreto é igual a  $25 \text{ kN/m}^3$  (Concreto Armado) e demais materiais estão prescritos na NBR 6120 (1980).

#### **2.5.1 – Ações permanentes**

Kimura (2007) diz que, as ações permanentes são aquelas que acompanham a utilização do edifício desde o início ao fim.

As ações permanentes são aquelas que atuam com valores constantes durante toda a vida da estrutura. Ações que crescem no decorrer do tempo, que possuem um valor limite constante também podem ser consideradas permanentes (NBR 6118:2003).

O peso próprio da estrutura, dos elementos construtivos e o empuxo são classificados como ações permanentes diretas. Os demais itens são considerados ações permanentes indiretas, como mostradas a seguir:

**Direta:** peso próprio, empuxo.

**Indireta:** retração, fluência, recalques, imperfeições geométricas, protensão.

### 2.5.2 – Ações variáveis

Kimura (2007) descreve ações variáveis como aquelas que atuam somente por um período da vida da estrutura, e classificam-se em dois grupos: diretas e indiretas.

As cargas acidentais de uso, o vento e a água são classificados como ações variáveis diretas. Já a variação de temperatura e ações dinâmicas como indiretas.

### 2.5.3 – Coeficientes de ponderação

Kimura (2007) define que o valor característico de uma ação ( $F_k$ ), seja ela permanente ou variável é transformado para um valor de cálculo ( $F_d$ ) externo por meio de um coeficiente de ponderação ( $\gamma_f$ ), normalmente chamado de coeficiente de segurança, muitas vezes definido como 1,4. Porém é necessário entender que este valor de 1,4 é resultado da multiplicação de três fatores, conforme a equação.

$$\gamma_f = \gamma_{f1} \times \gamma_{f2} \times \gamma_{f3}$$

O  $\gamma_{f1}$  procura prever a variabilidade do valor da ação, considerando que o valor da carga efetivamente aplicada à estrutura real não é 100% exato, podendo ser maior ou menor.

O  $\gamma_{f2}$  procura prever a simultaneidade das ações, isto é, a probabilidade de ações distintas ocorrerem simultaneamente.

O  $\gamma_{f3}$  procura levar em conta as aproximações feitas em projetos. Vale lembrar que toda análise estrutural, por mais bem elaborada que seja, é apenas a simulação da estrutura real. Usualmente usa-se 1,4 para concreto, e 1,15 para aço.

### 2.5.4 – Estados Limites

Os estados limites são situações em que uma estrutura deixa de atender requisitos necessários para o seu uso de forma plena e adequada (KIMURA, 2007).

Podem ser classificados em dois grupos principais de estados limites: Estado Limite Último (ELU), e Estado Limite de Serviço (ELS).

O ELU é alcançado quando o edifício tem o seu uso interrompido por um colapso parcial ou total da estrutura, trata-se de uma condição última, indesejável para todo o Engenheiro. Um exemplo é um pilar mal dimensionado, provocando a ruína de um prédio, como mostrado na Figura 7:

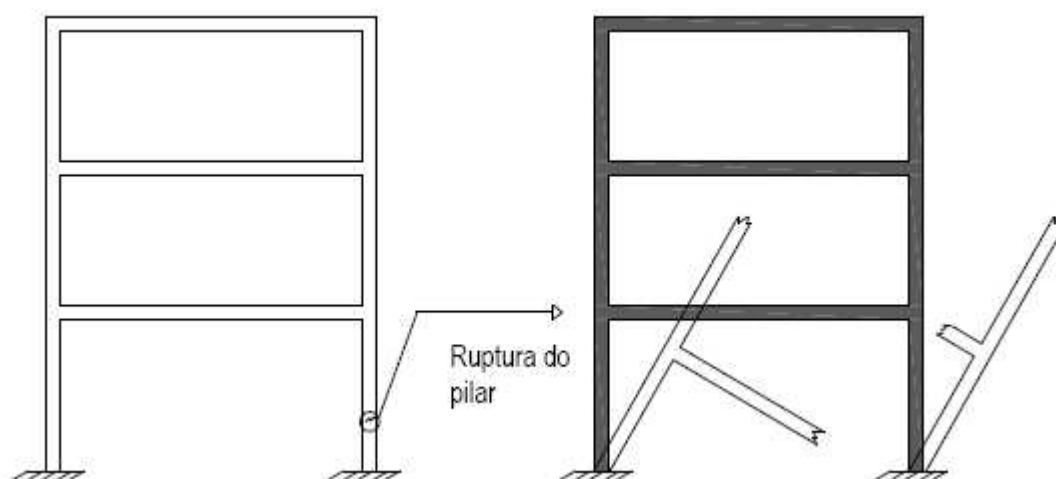


Figura 7: Figura esquemática, estado limite último atingido – ruína da estrutura.  
Fonte: Adaptado de Kimura (2007)

O ELS é alcançado quando o edifício deixa de ter o seu uso pleno e adequado em função do mau comportamento da estrutura, que não seja a ruína da mesma, como: fissuras visíveis que causam sensações de desconforto, alvenarias trincam como consequência de um deslocamento excessivo do prédio, uma janela deixa de abrir devido à deformação excessiva de uma viga, como ilustrado nas Figuras 8.a e b a seguir:

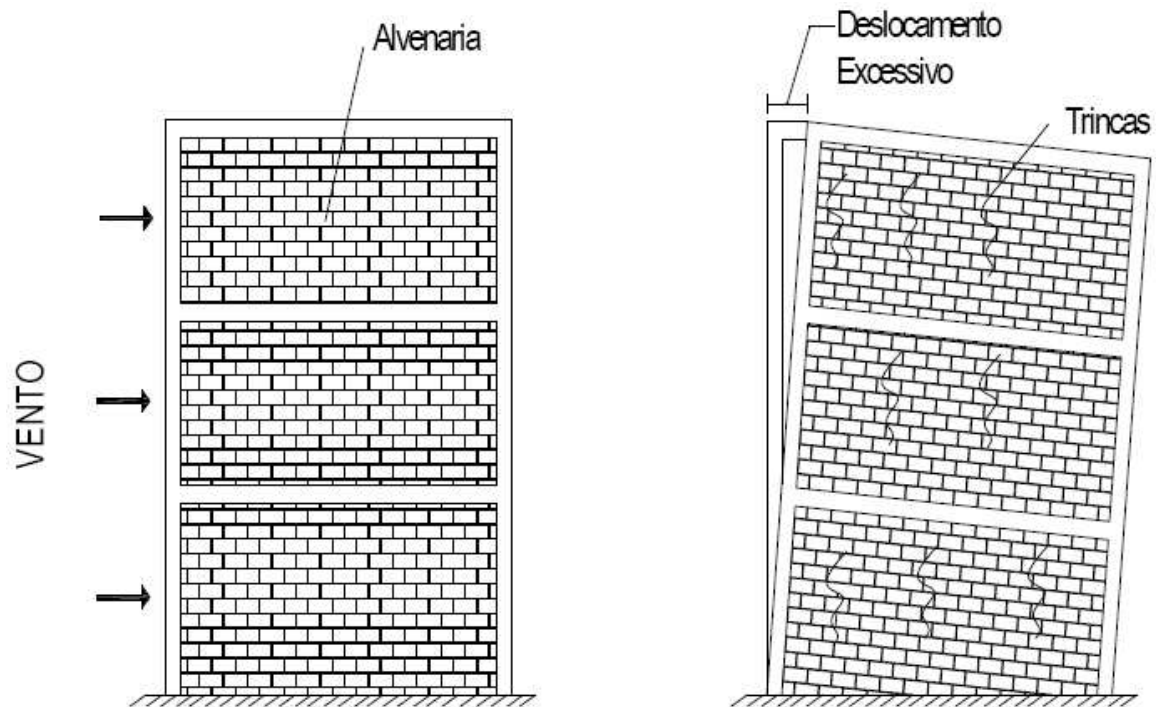


Figura 8a: Estado limite de serviço atingido – Trincas na alvenaria de vedação.  
Fonte: Adaptado de Kimura (2007)

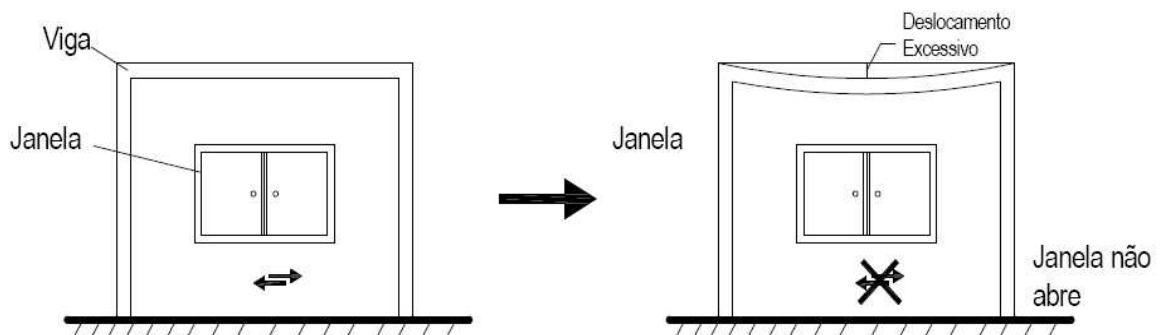


Figura 8b: Estado limite de serviço atingido – Mau funcionamento da edificação  
Fonte: Adaptado de Kimura (2007)

Estado Limites de serviço são aqueles relacionados à durabilidade das estruturas, aparência, conforto do usuário e a boa utilização funcional das mesmas, seja em relação aos usuários, seja em relação às máquinas e aos equipamentos utilizados (NBR 6118:2003).

Para Kimura (2007), uma boa análise estrutural deve atender simultaneamente a todos os estados limites últimos, pois quando qualquer um deles é alcançando, o uso da estrutura fica inviabilizado.

### 2.5.5 – Combinações das Ações em Estruturas de CA

Um edifício dificilmente estará sujeito à aplicação de apenas uma ação isolada por vez. Estará sim, submetido à atuação de várias ações ao mesmo tempo. Por exemplo, o vento nunca atuará num edifício sem que o seu peso próprio esteja atuando simultaneamente como mostrado na Figura 9, a seguir:

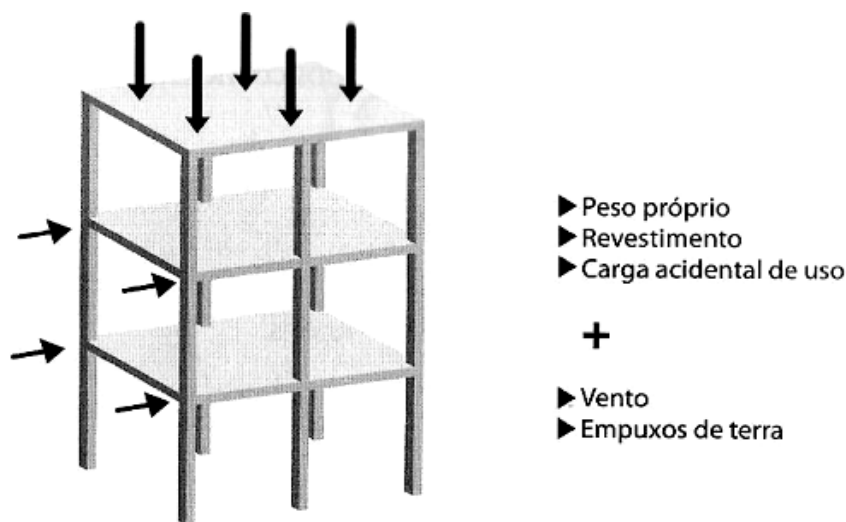


Figura 9: Ações atuantes em um edifício.  
Fonte: Kimura (2007)

### 2.5.6 Combinações Últimas

**Combinações últimas normais:** devem ser incluídas as ações permanentes e variável principal, com seus valores característicos e as demais ações variáveis consideradas como secundárias, com seus valores reduzidos de combinação conforme NBR 8681 (2003).

**Combinações últimas especiais ou de construção:** devem estar presentes as ações permanentes e ação variável especial, quando existir, com seus valores e demais ações variáveis com probabilidade não desprezível de ocorrência simultânea conforme NBR 8681 (2003).

**Combinações últimas excepcionais:** devem figurar as ações permanentes e ação variável excepcional, quando existir com seus valores representativos e as demais ações

variáveis com probabilidade não desprezível de ocorrência simultânea, com seus valores reduzidos de combinação, conforme NBR 8681 (2003). Enquadram-se sismo, incêndio e colapso progressivo.

### 2.5.7 Combinações de Serviço

**Quase permanentes:** podem atuar por um grande período da vida da estrutura. Sua consideração é necessária na verificação do estado limite de deformações excessivas;

**Freqüentes:** repetem-se muitas vezes durante o período de vida da estrutura. Sua consideração é necessária na verificação dos estados limites de formação de fissuras, de abertura de fissuras e vibrações excessivas. Também podem ser consideradas na verificação de estados limites de deformações excessivas decorrentes de vento ou de temperatura que podem comprometer as vedações;

**Raras:** ocorrem algumas vezes no período de vida da estrutura. Suas considerações são necessárias para verificação de estado limite de formação de fissura.

## 2.6 – ANÁLISE ESTRUTURAL

A análise estrutural consiste na obtenção e avaliação da resposta da estrutura perante as ações que lhe foram aplicadas. Em outras palavras, significa calcular e analisar os deslocamentos e os esforços solicitantes nos pilares, nas vigas e nas lajes que compõem um edifício.

### 2.6.1 – Modelos Estruturais

Toda análise estrutural é baseada na adoção de um modelo estrutural ou modelo numérico. Existem vários modelos estruturais que podem ser usados nas análises estruturais de estruturas de CA. Alguns mais simples outros mais complexos. Alguns bastante limitados outros mais abrangentes (KIMURA, 2007).

Vejamos a seguir alguns métodos:

**Métodos Aproximados + Vigas Contínuas:** Kimura (2007) observa que este método é o mais usado nos cursos de graduação para cálculos de estruturas de concreto armado. A análise estrutural baseada neste modelo é realizada da seguinte maneira:

- Os esforços e as flechas nas lajes são calculados a partir de tabelas baseadas em diversos métodos aproximados consagrados.
- As cargas das lajes são transferidas para as vigas por área de influência.
- Os esforços e as flechas nas vigas são calculados por meio do modelo clássico de viga contínua com apoios simples que simulam os pilares.
- A reação vertical obtida nos apoios das vigas é transferida como carga concentrada para os pilares.

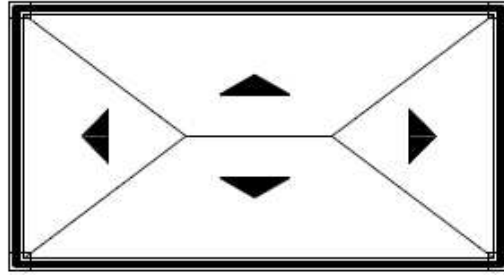
No entanto, este método possui certas aproximações que limitam o seu uso para o cálculo de estruturas mais complexas. São elas:

- Lajes, vigas e pilares calculados de forma totalmente independentes: não é considerada a interação entre esses elementos. Ressalva-se que uma estrutura de concreto armado na vida real é monolítica, assim, seus elementos trabalham de forma conjunta;
- Ligações viga-pilar são consideradas articuladas, não havendo transferência de momento fletor entre eles;
- Somente lajes com formas geométricas regulares podem ser calculadas pelos processos aproximados. Painéis complexos, comuns em estrutura de CA não podem ser analisados por este método;
- A distribuição de carga por área de influência só pode ser válida para lajes com geometria regular, distribuição de carga uniforme e condição de apoio bem definida;
- Os efeitos provocados pelas ações horizontais na estrutura não são considerados neste modelo. Somente são consideradas as cargas verticais.

A seguir pode-se ver na Figura 10, o modelo de métodos aproximados + vigas contínuas:



► LAJES (Métodos Aproximados)



► VIGAS (Vigas contínuas)

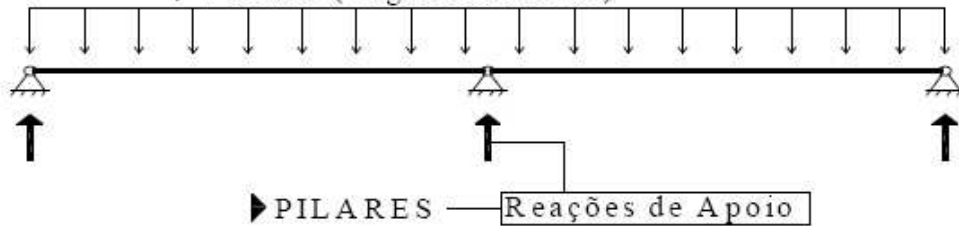


Figura 10: Modelo Método Aproximado +Vigas contínuas.  
Fonte: Adaptado de Kimura (2007)

**Vigas + Pilares (Pórtico H):** É uma evolução direta do clássico modelo de viga contínua utilizado para análise de vigas. Nesse modelo, ao invés de apoio simples, os lances, inferior e superior dos pilares são modelados juntamente com a viga formando um pórtico plano. As limitações deste modelo são basicamente as mesmas da viga contínua. Sua única vantagem é a consideração da ligação entre vigas e os pilares (KIMURA, 2007). Como mostrado na Figura 11 a seguir:

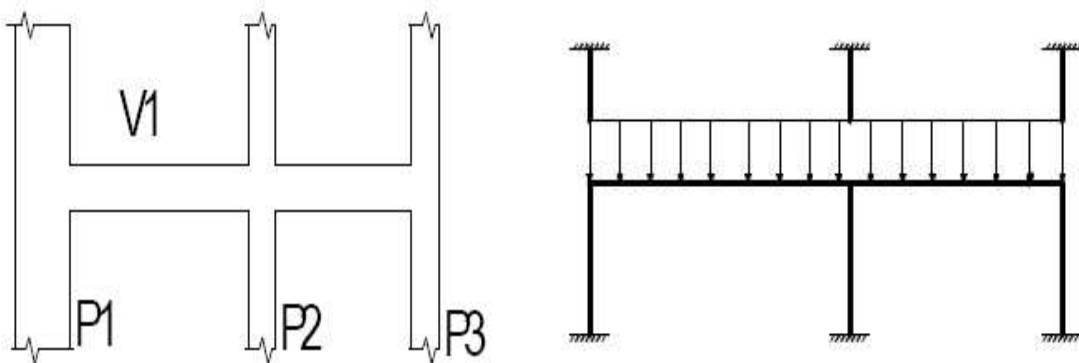


Figura 11: Modelo Vigas + Pilares.  
Fonte: Adaptado de Kimura (2007)

**Grelha Somente de Vigas:** Trata-se de um modelo direcionado para análise estrutural de um pavimento no qual é levada em conta a interação entre todas as vigas presentes. É composto por elementos lineares que simulam as vigas, dispostos no plano horizontal das lajes e submetidos a cargas perpendiculares ao mesmo. Os pilares são representados por apoios simples e as lajes não são consideradas no modelo.

Em cada intersecção das barras é definido um nó que possui três graus de liberdade, o que possibilita a obtenção dos deslocamentos e esforços, oriundo da aplicação de ações verticais em todas as vigas do pavimento, bem como a carga nos pilares. A restrição deste modelo é a impossibilidade de analisar os efeitos das ações horizontais (vento, empuxo) atuantes na estrutura (KIMURA, 2007). Mostrado na Figura 12 seguinte.

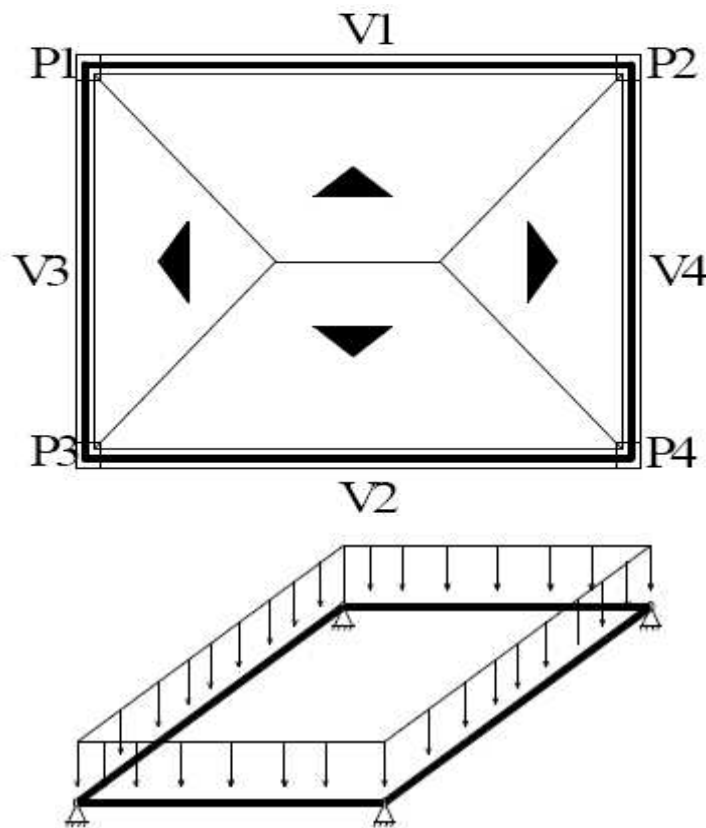


Figura 12: Modelo grelha somente de vigas.  
Fonte: Adaptado de Kimura (2007)

**Grelhas de Vigas e Lajes:** É um método direcionado para análise estrutural de um pavimento, pode ser denominado como análise de pavimento por “analogia de grelhas”. Este modelo é composto por elementos lineares que são expostos no plano horizontal do piso que

simulam as vigas e lajes, formando assim uma malha de barras submetidas a cargas verticais; os pilares são representados por apoios simples.

Kimura (2007) relata que, a interação entre todas as lajes e vigas do pavimento é considerada de forma bastante precisa. A transferência de carga das lajes para as vigas não é feita por área de influência. Uma vez aplicada às cargas verticais nos elementos, a distribuição dos esforços nas lajes e vigas é feita automaticamente de acordo com a rigidez de cada barra. O esforço migrará para as regiões de maior rigidez, assim como no modelo de grelha somente de vigas, cada intersecção entre as barras é definido um nó com 3 graus de liberdade, também não é possível analisar os efeitos das ações horizontais (vento e empuxo) atuantes na estrutura, mostrada na Figura 13 seguinte:

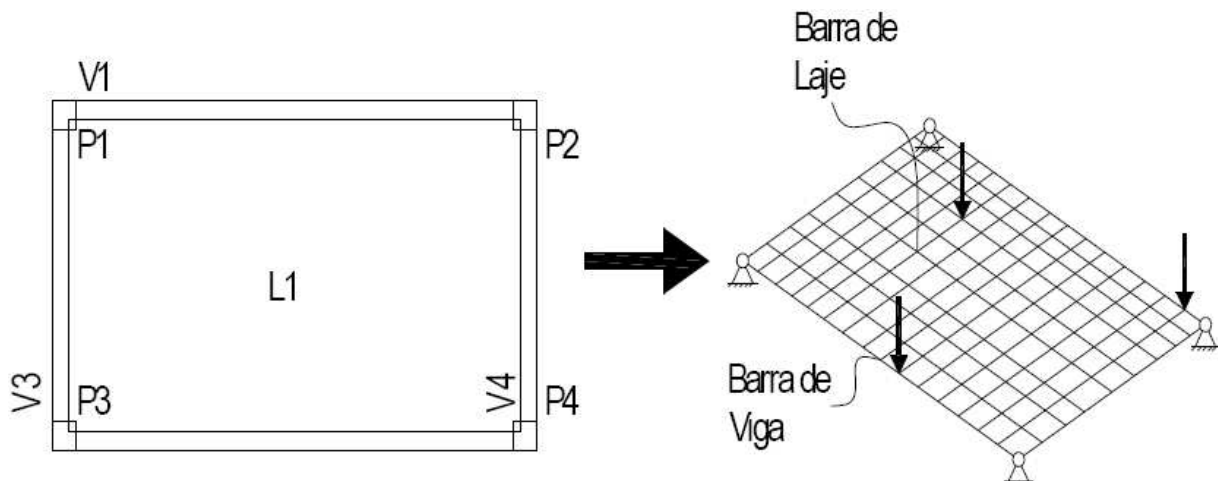


Figura 13: Modelo de grelha de vigas e lajes  
Fonte: Adaptado de Kimura (2007)

**Pórtico Plano:** Com este modelo é possível uma análise do comportamento global de uma estrutura, admitindo tanto aplicações de cargas horizontais como verticais. Uma parte da estrutura é analisada por barras dispostas num mesmo plano vertical que representam um conjunto de vigas e pilares presentes num mesmo alinhamento do edifício. A laje não faz parte deste modelo (KIMURA, 2007).

Cada nó entre os elementos lineares possui três graus de liberdade (duas translações e uma rotação), possibilitando a obtenção dos deslocamentos e esforços em todas as vigas e pilares, mostrada na Figura 14 a,b:

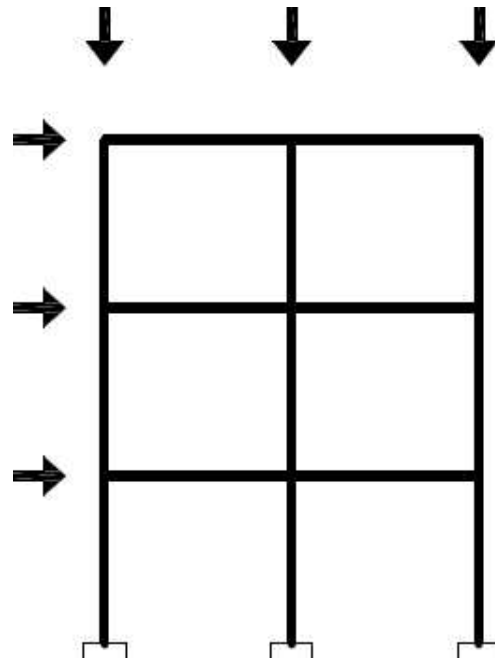


Figura 14a: Modelo estrutural Pórtico Plano.  
Fonte: Adaptado de Kimura 2007

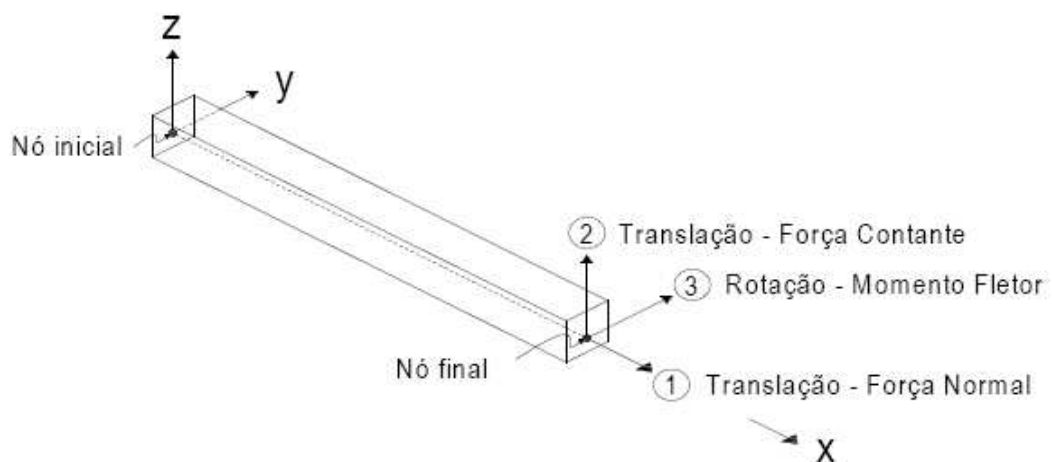


Figura 14b: Elemento linear com 3 graus de liberdade e suas ações  
Fonte: Adaptado de Kimura (2007)

**Pórtico Espacial:** Consiste num modelo tridimensional composto por barras que representam todos os pilares e vigas presentes em uma estrutura, possibilitando uma análise bastante completa e eficiente do comportamento global de uma estrutura. O modelo de pórtico espacial permite tanto as ações verticais quanto horizontais podendo avaliar o comportamento da estrutura em todas as direções e sentidos.

Cada nó entre os elementos lineares como mostra a Figura 15.a e b, possui seis graus de liberdade, possibilitando a obtenção de todos os deslocamentos e esforços (KIMURA, 2007).

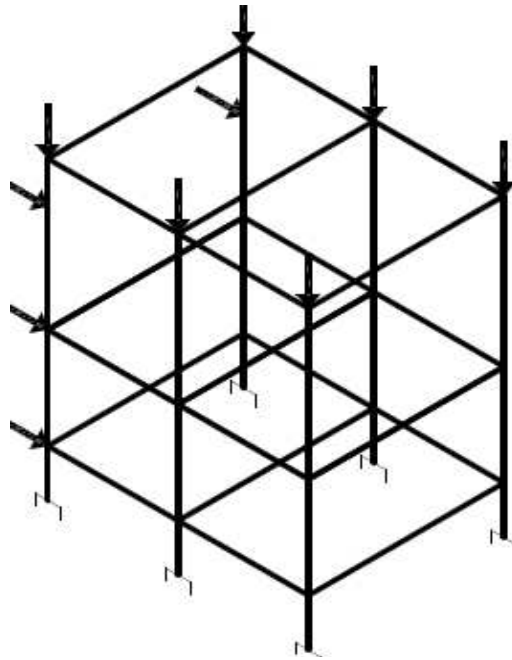


Figura 15a: Representação do Pórtico Espacial.  
Fonte: Adaptado de Kimura (2007)

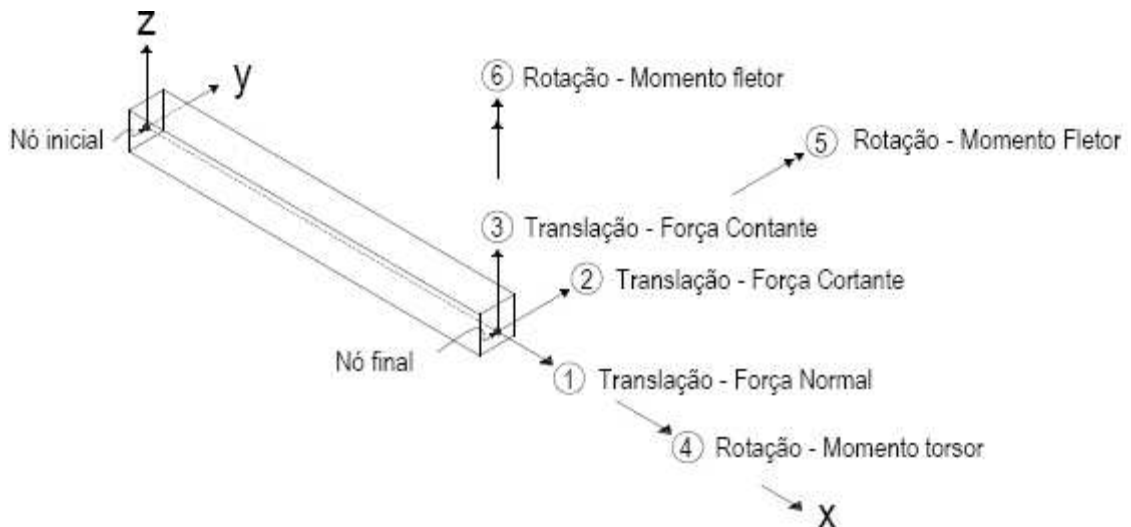


Figura 15b: Representação da barra espacial  
Fonte: Adaptado de Kimura (2007)

**Elementos Finitos:** Conforme Kimura (2007) este é um método numérico consagrado e eficiente que pode ser amplamente utilizado na análise de estrutura de CA. Fazendo uso do método de elementos finitos de placas, pode-se analisar um pavimento.

Cada placa pode ter um formato qualquer (usualmente triangular ou retangular), bem como um número de nós variáveis, como mostrado na Figura 16, a seguir:

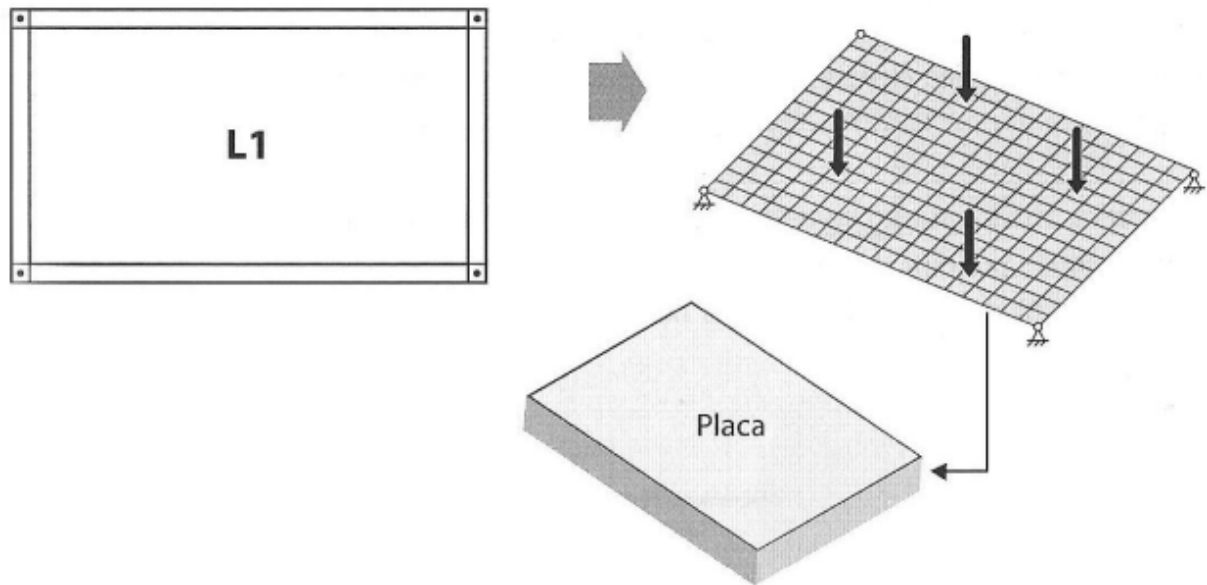


Figura 16: Representação de elementos finitos.  
Fonte: Kimura (2007)

### 2.6.2 – Combinações de Modelos Estruturais

Pelos modelos apresentados, pode-se notar que existem alguns direcionados a análise de pavimentos e outros para análise global da estrutura. Na prática é comum a adoção de combinação de modelos estruturais na elaboração da análise estrutural. Sendo assim, diz-se que, para as ações verticais, os modelos recomendados são: viga contínua, grelha, elementos finitos e pórtico espacial. Já para as ações horizontais os recomendados são: pórtico plano e pórtico espacial (KIMURA, 2007).

### 2.6.3 – Tipos de Análise Estrutural

Nas situações de projeto a análise estrutural pode ser efetuada por vários métodos, diferenciados pelo comportamento admitido para os materiais constituintes da estrutura. Devem-se conhecer sempre as limitações de cada método. Todos os modelos apresentados na NBR 6118 (2003) consideram pequenos deslocamentos para estrutura.

**Análise linear:** quando efetuada a análise puramente linear, o deslocamento resultante é proporcional ao acréscimo de carga. A resposta da estrutura, em termos de deslocamento terá um comportamento linear à medida que o carregamento for aplicado (KIMURA, 2007).

**Análise não-linear:** conforme a NBR 6118 (2003), na análise não linear, considera-se a não-linearidade do material. Toda a geometria da estrutura e de suas armaduras precisa ser conhecida, pois a resposta da armadura depende de como ela foi armada. A análise não-linear pode ser adotada tanto para verificação dos estados limites últimos como para verificação dos estados de serviços. Recomenda-se para análise de edificação acima de quatro pavimentos.

## 2.7 – DIMENSIONAMENTO

### 2.7.1 – Objetivos

De acordo com a NBR6118 (2003), o objetivo do dimensionamento é que se desenvolva logo após a análise estrutural a garantia de segurança, em relação ao ELU e ELS, das estruturas como um todo e de cada uma de suas partes.

Essa segurança exige que sejam respeitadas condições analíticas do tipo:

$$S_d \leq R_d$$

Onde:

S<sub>d</sub>: Esforço solicitante de projeto

R<sub>d</sub>: Esforço resistente de projeto

Onde se impõem que as solicitações de cálculo sejam inferiores as resistências de cálculo para todos os estados limites considerados importantes para a estrutura em questão. Essa segurança ainda exige que sejam respeitadas regras construtivas.

Além de um arranjo estrutural que garanta segurança ao conjunto, devem ser aplicadas regras tais como as de dimensões mínimas para a definição das formas, bem como as regras de detalhamento das armaduras.

### 2.7.2 – Verificação de ruptura a compressão

Para não haver ruptura a compressão, o momento último de compressão (MUC) dever ser maior que o momento fletor de cálculo (Md), como segue:

$$MUC \geq Md$$

$$MUC = 0,272 \cdot bw \cdot d^2 \cdot fcd$$

Onde:

MUC: Momento último de compressão

Md: Momento fletor de cálculo

bw: Largura da viga

d: Altura útil da viga

*fcd*: Resistência de cálculo do concreto

### 2.7.3 – Taxa de armadura para vigas a flexão simples

Armadura mínima  $\rightarrow A_{s \text{ min}} = 0,15\%$

Armadura máxima  $\rightarrow A_{s \text{ máx}} = 4\%$

A área de aço da armadura ( $A_s$ ) pode ser calculada em função da taxa de armadura ( $\rho$ ), da largura da viga (bw) e da altura (d), calculada a partir das expressões abaixo:

$$a = \sqrt{\frac{1,4}{0,34 \cdot \frac{fck}{1,4} \left( 1 - \frac{\rho \cdot fy \cdot 1,4}{1,7 \cdot 1,15 \cdot fck} \right)}}$$

$$d = a \sqrt{\frac{M}{bw}}$$

$$A_s = \rho \cdot bw \cdot d$$

Onde:

$\rho$ : taxa de armadura

$fy$ : Resistência do aço

*fck*: Resistência a compressão do concreto

*a*: parâmetro em função de  $\rho$  e *fck*



Outra maneira de calcular a área de aço  $A_s$  pode ser feita utilizando as tabelas encontradas em Marchetti e Botelho (2006).

Neste procedimento calcula-se o parâmetro  $K_6$  a partir da expressão:

$$K_6 = 10^5 \cdot \frac{bw \cdot d^2}{M}$$

A partir do  $K_6$  e do  $f_{ck}$  correspondente do concreto deve-se identificar o parâmetro  $K_3$  relativo ao tipo de aço CA25, CA50 ou CA60. A Tabela 1 a seguir contém uma série de valores para  $K_6$  e  $K_3$ :

Tabela 1: Valores de  $K_6$  e  $K_3$  para cálculo do  $A_s$   
Fonte: Botelho e Marchetti (2006)

<b>K6</b>			<b>K3</b>			<b>x/h</b>
<b>fck 20</b>	<b>fck 25</b>	<b>fck 30</b>	<b>CA 25</b>	<b>CA 50</b>	<b>CA 60</b>	
1447.00	1158.00	965.00	0.6470	0.323	0.269	0.010
726.00	581.00	484.00	0.6490	0.325	0.271	0.020
486.00	389.00	324.00	0.6520	0.326	0.272	0.030
366.00	293.00	244.00	0.6550	0.327	0.273	0.040
294.00	235.00	196.00	0.6570	0.329	0.274	0.050
246.00	197.00	164.00	0.6600	0.330	0.275	0.060
212.00	169.00	141.00	0.6630	0.331	0.276	0.070
186.00	149.00	124.00	0.6650	0.333	0.277	0.080
166.00	133.00	111.00	0.6680	0.334	0.278	0.090
150.00	120.00	100.10	0.6710	0.335	0.280	0.100
137.00	110.00	91.40	0.6740	0.337	0.281	0.110
126.00	100.90	84.10	0.6770	0.338	0.282	0.120
117.00	93.60	78.00	0.6790	0.340	0.283	0.130
109.00	87.20	72.70	0.6820	0.341	0.284	0.140
102.20	81.80	68.10	0.6850	0.343	0.285	0.150
96.20	77.00	64.20	0.6880	0.344	0.287	0.160
92.50	74.00	61.70	0.6900	0.345	0.288	0.167
91.00	72.80	60.60	0.6910	0.346	0.288	0.170
86.30	69.00	57.50	0.6940	0.347	0.289	0.180
82.10	65.70	54.70	0.6970	0.349	0.290	0.190
78.30	62.70	52.20	0.7000	0.350	0.292	0.200
74.90	59.90	49.90	0.7030	0.352	0.293	0.210
71.80	57.50	47.90	0.7060	0.353	0.294	0.220
69.00	55.20	46.00	0.7090	0.355	0.296	0.230
66.40	53.10	44.30	0.7130	0.356	0.297	0.240
64.10	51.20	42.70	0.7160	0.358	0.298	0.250
62.10	49.70	41.40	0.7190	0.359	0.299	0.259
61.90	49.50	41.20	0.7190	0.359	0.300	0.260
59.80	47.90	39.90	0.7220	0.361	0.301	0.270
58.00	46.40	38.60	0.7250	0.363	0.302	0.280

Tabela 1: Continuação  
 Fonte: Botelho e Marchetti (2006)

K6			K3			x/h
fck 20	fck 25	fck 30	CA 25	CA 50	CA 60	
56.20	45.00	37.50	0.7290	0.364	0.304	0.290
54.60	43.70	36.40	0.7320	0.366	0.305	0.300
53.10	42.50	35.40	0.7350	0.368	0.306	0.310
51.60	41.30	34.40	0.7390	0.369	0.308	0.320
50.30	40.30	33.50	0.7420	0.371	0.309	0.330
49.10	39.20	32.70	0.7460	0.373	0.311	0.340
47.90	38.30	31.90	0.7490	0.374	0.312	0.350
46.80	37.40	31.20	0.7520	0.376	0.313	0.360
45.70	36.60	30.50	0.7560	0.378	0.315	0.370
44.70	35.80	29.80	0.7600	0.380	0.316	0.380
43.80	35.00	29.20	0.7630	0.382	0.318	0.390
42.90	34.30	28.60	0.7670	0.383	0.319	0.400
42.00	33.60	28.00	0.7700	0.385	0.321	0.410
41.20	33.00	27.50	0.7740	0.387	0.323	0.420
40.50	32.40	27.00	0.7780	0.389	0.324	0.430
39.80	31.50	26.50	0.7820	0.391	0.326	0.440
39.60	31.70	26.40	0.7820	0.391	0.327	0.442
39.10	31.20	26.00	0.7860	0.393	0.328	0.450
38.40	30.40	25.60	0.7890	0.395	0.329	0.460
37.80	30.30	25.20	0.7930	0.396	0.330	0.469
37.80	30.20	25.20	0.7930	0.397	0.331	0.470
37.20	29.70	24.80	0.7970	0.399	0.332	0.480
36.60	29.30	24.40	0.8010	0.401	0.333	0.490
36.60	28.80	24.00	0.8050	0.402	0.334	0.500

A área de aço  $A_s$  é obtida a partir da expressão:

$$A_s = \frac{K3.M}{10.d}$$

#### 2.7.4 – Distribuição da armadura nas vigas

O espaçamento mínimo livre entre as faces das barras longitudinais, medido no plano da seção transversal, deve ser igual ou superior ao maior dos seguintes valores:

a) no sentido horizontal:

20 mm

$eh \geq$  diâmetro da barra

1,2 vezes o diâmetro máximo do agregado

b) no sentido vertical:

20 mm

$ev \geq$  diâmetro da barra

0,5 vezes o diâmetro máximo do agregado

### 2.7.5 – Cobrimento da armadura

O cobrimento corresponde entre a classe de agressividade ambiental, onde a classe I, II, III e IV representa agressividade insignificante, pequena, grande e elevada respectivamente, conforme mostrado no Quadro 3, a seguir:

Quadro 3: Cobrimento de acordo com a classe de agressividade  
Fonte: NBR6118 (2003)

Tipo de estrutura	Componente ou elemento	Classe de agressividade ambiental			
		I	II	III	IV <sup>3</sup>
		Comprimento nominal mm			
Concreto Armado	Laje <sup>2</sup>	20	25	35	45
	Viga/Pilar	25	30	40	50
Concreto Protendido <sup>1</sup>	Todos	30	35	45	55

<sup>1</sup> Cobrimento nominal da armadura passiva que envolve a bainha ou os fios, cabos e cordoalhas sempre superiores ao especificado para o elemento de concreto armado, devido aos riscos de corrosão fragilizante sob tensão.

<sup>2</sup> Para a face superior de lajes e vigas que serão revestidas com argamassa de contrapiso, com revestimentos finais secos tipo carpete e madeira, com argamassa de revestimento

### **2.7.6 – Dimensões limites para vigas**

A seção transversal das vigas não deve apresentar largura menor que 12 cm e das vigas-parede, menor que 15 cm. Estes limites podem ser reduzidos, respeitando-se um mínimo absoluto de 10 cm em casos excepcionais, sendo obrigatoriamente respeitadas as seguintes condições.

a) alojamento das armaduras e suas interferências com as armaduras de outros elementos estruturais, respeitando os espaçamentos e coberturas estabelecidos.

b) lançamento e vibração do concreto de acordo com a NBR 14931 (2003).

### **2.7.7 – Deslocamentos limites**

São valores práticos utilizados para verificação do estado limite de deformações excessivas da estrutura.

Deslocamentos excessivos e tendência à vibração dos elementos estruturais podem ser indesejáveis por diversos motivos. Eles podem ser classificados como:

- Aceitabilidade sensorial
- Estrutura em serviço
- Efeitos em elementos não estruturais
- Efeitos em elementos estruturais

Os limites para deslocamentos são indicados no Quadro 4 a seguir:

Quadro 4 Limites de deslocamento  
Fonte: NBR6118:2003

Tipo de efeito	Razão da limitação	Exemplo	Deslocamento a considerar	Deslocamento limite	
Aceitabilidade sensorial	Visual	Deslocamentos visíveis em elementos estruturais	Total	$\ell / 250$	
	Outro	Vibrações sentidas no piso	Devido a cargas acidentais	$\ell / 350$	
Efeitos estruturais em serviço	Superfícies que devem drenar água	Coberturas e varandas	Total	$\ell / 250^{1)}$	
	Pavimentos que devem permanecer planos	Ginásios e pistas de boliche	Total	$\ell / 350 +$ contraflecha <sup>2)</sup>	
			Ocorrido após a construção do piso	$\ell / 600$	
Elementos que suportam equipamentos sensíveis	Laboratórios	Ocorrido após nivelamento do equipamento	De acordo com recomendação do fabricante do equipamento		
Efeitos em elementos não estruturais	Paredes	Alvenaria, caixilhos e revestimentos	Após a construção da parede	$\ell / 500^{3)}$ ou 10 mm ou $\theta = 0,0017 \text{ rad}^{4)}$	
		Divisórias leves e caixilhos telescópicos	Ocorrido após a instalação da divisória	$\ell / 250^{3)}$ ou 25 mm	
		Movimento lateral de edifícios	Provocado pela ação do vento para combinação freqüente ( $\psi_1 = 0,30$ )	$H / 1700$ ou $H / 850^{5)}$ entre pavimentos <sup>6)</sup>	
		Movimentos térmicos verticais	Provocado por diferença de temperatura	$\ell / 400^{7)}$ ou 15 mm	
	Forros	Movimentos térmicos horizontais	Provocado por diferença de temperatura	$H / 500$	
		Revestimentos colados	Ocorrido após construção do forro	$\ell / 350$	
		Revestimentos pendurados ou com juntas	Deslocamento ocorrido após construção do forro	$\ell / 175$	
	Pontes rolantes	Desalinhamento de trilhos	Deslocamento provocado pelas ações decorrentes da frenagem	$H / 400$	
	Efeitos em elementos estruturais	Afastamento em relação às hipóteses de cálculo adotadas	Se os deslocamentos forem relevantes para o elemento considerado, seus efeitos sobre as tensões ou sobre a estabilidade da estrutura devem ser considerados, incorporando-as ao modelo estrutural adotado.		

<sup>1)</sup> As superfícies devem ser suficientemente inclinadas ou o deslocamento previsto compensado por contraflechas, de modo a não se ter acúmulo de água.

<sup>2)</sup> Os deslocamentos podem ser parcialmente compensados pela especificação de contraflechas. Entretanto, a atuação isolada da contraflecha não pode ocasionar um desvio do plano maior que  $\ell / 350$ .

<sup>3)</sup> O vão  $\ell$  deve ser tomado na direção na qual a parede ou a divisória se desenvolve.

<sup>4)</sup> Rotação nos elementos que suportam paredes.

<sup>5)</sup>  $H$  é a altura total do edifício e  $H$ , o desnível entre dois pavimentos vizinhos.

<sup>6)</sup> Esse limite aplica-se ao deslocamento lateral entre dois pavimentos consecutivos devido à atuação de ações horizontais. Não devem ser incluídos os deslocamentos devidos a deformações axiais nos pilares. O limite também se aplica para o deslocamento vertical relativo das extremidades de lintéis conectados a duas paredes de contraventamento, quando  $H$  representa o comprimento do lintel.

<sup>7)</sup> O valor  $\ell$  refere-se à distância entre o pilar externo e o primeiro pilar interno.

#### Observações:

1. Todos os valores limites de deslocamentos supõem elementos de vão  $L$ , suportados em ambas as extremidades por apoios que não se movem. Quando se tratar de balanços, o vão equivalente a ser considerado deve ser o dobro do comprimento do balanço.

2. Para o caso de elementos de superfície, os limites consideram que o valor  $L$  é o menor vão, exceto em casos de verificação de paredes e divisórias, onde interessa a direção no qual a parede ou divisória se desenvolve, limitando-se este valor a duas vezes o vão menor.
3. O deslocamento total será obtido a partir da combinação das ações características ponderadas pelos coeficientes de acompanhamento definidos pela norma NBR6118: 2003 no capítulo 12.
4. Deslocamentos excessivos podem ser parcialmente compensados por contra-flechas.

## 2.8 – OTIMIZAÇÃO

O objetivo principal do projeto estrutural é encontrar o ponto de equilíbrio entre a maximização da segurança e a minimização de custos. Como os dois conceitos são contraditórios entre si, na prática se busca minimização dos custos para uma estrutura que satisfaça princípios básicos de segurança, com respeito aos estados limites de ruptura e de utilização, e a imposições de normas técnicas. Sucintamente, pode-se definir otimização estrutural como sendo a definição de uma série de variáveis de projeto que juntas vão extremar uma função objetivo definida. (VIANNA 2003, apud CHAVES 2004).

Segundo Camp et. al (1998) apud Chaves (2003) e Nina (2006), em geral as técnicas de otimização no projeto de estruturas podem ser classificadas em três tipos de aproximação: a programação matemática, métodos dos critérios de otimização ou algoritmos genéticos.

A programação matemática pode ser dividida em programação linear e não-linear. Na programação linear a função objetivo e as restrições são expressas por uma combinação linear das variáveis de projeto, enquanto que na programação não-linear as restrições são funções não-lineares nas variáveis de projeto. A programação matemática não-linear foi desenvolvida para resolver problema de otimização não-linear sem restrições, e as condições necessárias para alcançar a solução ótima. A otimização de elementos estruturais de concreto armado é um problema não-linear com restrições, o que o torna um dos tipos mais difíceis de resolver.

### 2.8.1 – Algoritmos Genéticos

O algoritmo genético é uma técnica baseada nos princípios genéticos de sobrevivência de uma população através de adequações e adaptações (CHAVES, 2003).

Os Algoritmos Genéticos (AGs) são algoritmos de busca, fundamentados no processo da seleção natural proposto por Charles Darwin, inicialmente propostos por John Holland em seu livro no ano de 1975. Os AGs, a partir de uma população de indivíduos, cada um com um valor de adaptabilidade associado chamado aptidão, desenvolvem através de operações genéticas como cruzamentos e mutações, uma nova geração de indivíduos usando os princípios Darwinianos de reprodução e sobrevivência dos mais aptos. Cada indivíduo na população representa uma possível solução para um dado problema. O que o algoritmo genético faz é procurar aquela que seja boa ou a melhor, visando à otimização da função objetivo (SILVA, 2001).

O método dos algoritmos genéticos não precisa de uma relação explícita entre a função objetivo e as restrições do problema. Ele trabalha com uma população de variáveis e cada uma define uma solução potencial. (NINA, 2006)

Função objetivo ou de avaliação é a função que se quer otimizar. Ela contém a informação numérica do desempenho de cada indivíduo na população. Nela estão representadas as características do problema que o AG necessita para realizar seu objetivo, sendo expressa normalmente como  $F = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , onde  $x_1, x_2, \dots, x_n$  são as variáveis que o algoritmo procura determinar para otimizar  $F$  (SILVA, 2001).

Chaves (2003), descreve o problema de otimização como:

$$\min_{x \in R} f(x) \quad \text{sujeito a:} \quad \begin{array}{l} g_i(x) \geq 0 \\ h_j(x) = 0 \end{array}$$

Onde  $f$ ,  $g_i$ ,  $h_j$ , são funções escalares estimadas das variáveis  $x$ .

De acordo com Castro (2001) algumas definições podem ser escritas como:

**Variável de Projeto:** as variáveis de projeto são aquelas que se alteram durante o processo de otimização. Elas podem ser contínuas (reais), inteiras ou discretas (valores compreendidos dentro de certo conjunto fixo).

De um ponto de vista físico, as variáveis de projeto podem representar as seguintes informações sobre a estrutura:

- Propriedades mecânicas ou físicas do material;
- A topologia da estrutura, isto é, o padrão de conexão dos elementos ou o seu número de elementos;
- A configuração ou a forma geométrica da estrutura;
- Dimensões de seções transversais ou comprimento dos elementos.

**Restrições:** as restrições são funções de igualdade ou desigualdade que descrevem situações indesejáveis de projeto. Dividem-se em dois grupos:

- Restrições Laterais: efetuadas diretamente sobre as variáveis de projeto, limitando seus valores;
- Restrições de Comportamento: condições desejáveis de limites de tensões, deslocamentos, frequências naturais de vibração, etc.

**Espaço de Busca ou Região Viável:** É o conjunto, espaço ou região que compreende as soluções possíveis ou viáveis do problema a ser otimizado. Deve ser caracterizado pelas funções de restrição, que definem as soluções viáveis do problema a ser resolvido.

**Função Objetivo ou de Avaliação:** É a função que se quer otimizar. Ela pode ser de uma ou mais variáveis, sendo estas duas opções classificadas como otimização *unidimensional* e *multidimensional* respectivamente.

**Ponto Ótimo:** É o ponto, caracterizado pelo vetor  $x^* = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ , formado pelas variáveis de projeto que extremizam a função objetivo e satisfazem as restrições.

**Valor Ótimo:** É o valor da função objetivo  $f(x^*)$  no ponto ótimo.

**Solução Ótima:** É o par formado pelo ponto ótimo e o valor ótimo  $[x^*, f(x^*)]$ . A solução ótima pode ser:

- Local: quando o valor ótimo é localizado;
- Global: quando o valor ótimo é global na região viável;
- Restringida: quando há restrições satisfeitas como igualdade (ativas);



- Não-restringida: quando não há restrições ativas no ponto ótimo

Os mínimos locais e globais são mostrados no Figura 17 a seguir:

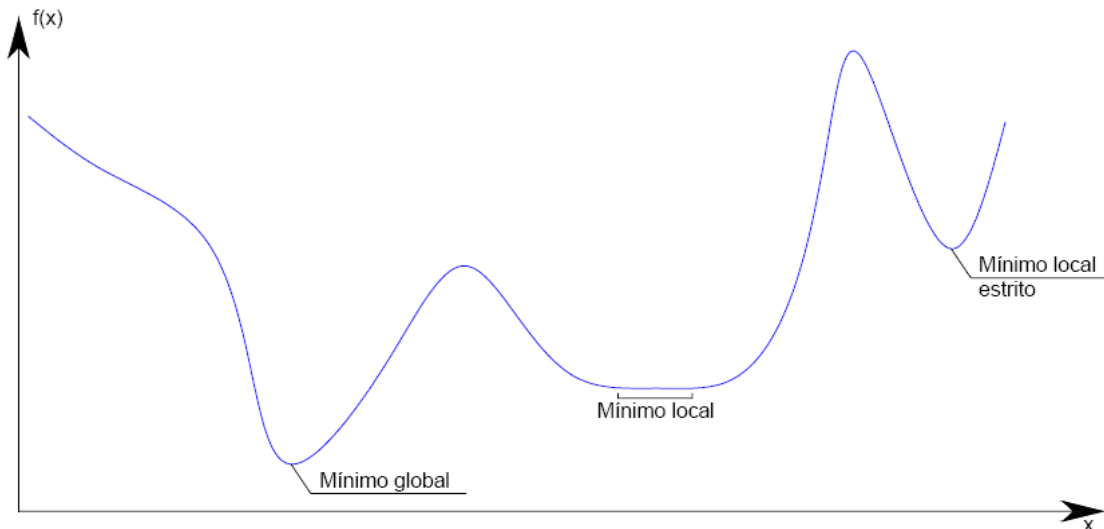


Figura 17: Representação gráfica dos pontos de mínimos locais e globais de uma função genérica.  
Fonte: Nina (2006)

É impossível mapear todos os problemas existentes dentro de um eixo ordenado, entretanto, com uma representação abstrata desta forma e a adoção da eficiência com que os métodos resolvem cada problema individualmente para o eixo das ordenadas, seria possível determinar as curvas indicativas da “*aplicabilidade x eficiência*” dos métodos disponíveis.

Utilizando-se deste gráfico encontram-se três tipos extremos de métodos, os quais foram ilustrados na Figura 18 seguinte:

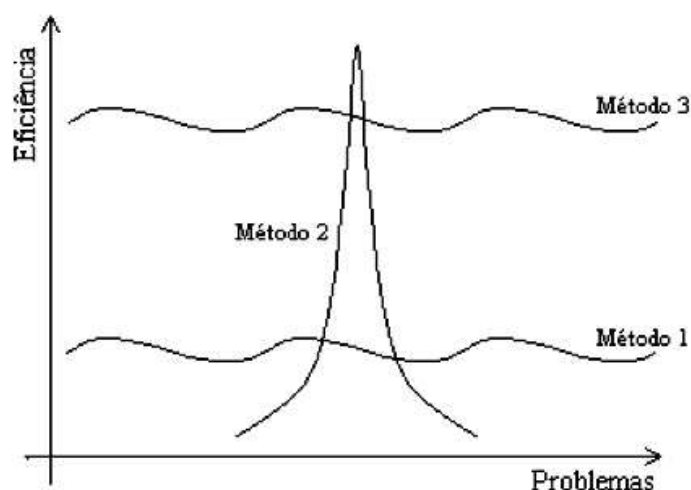


Figura 18: Aplicabilidade em Problemas x Eficiência de Resolução dos Métodos.  
Adaptado: Silva (2001)

**Método 1:** pouco eficiente para a totalidade dos problemas existentes.

**Método 2:** altamente eficiente para uma pequena faixa de problemas, entretanto, pouco eficientes ou nem aplicáveis para a maior parte deles.

**Método 3:** razoavelmente eficiente para a totalidade dos problemas existentes.

Dentro deste contexto, os Algoritmos Genéticos se aproximariam da terceira classe de métodos, não sendo mais eficientes que aqueles projetados especificamente para determinado problema tratado. Contudo, perturbações no problema original trariam quase nenhum prejuízo aos AGs, mas possivelmente, a inutilidade de outros métodos.

### 2.8.2 – Diferenças entre os Algoritmos Genéticos e os Métodos Clássicos

De acordo com Castro (2001), os métodos clássicos de otimização iniciam-se com um único candidato, chamado de solução básica, e pelo cálculo de derivadas se determina para qual direção se deve caminhar na busca do próximo candidato. Por trabalharem com o cálculo de derivadas, são denominados algoritmos de ordem  $n$ , onde  $n$  é a maior derivada utilizada. Exemplos típicos são os métodos dos gradientes conjugados e de Newton, que por utilizarem

derivadas primeiras e segundas, respectivamente, são caracterizados como algoritmos de primeira e segunda ordem. Todavia, classificações intermediárias são também possíveis, como é o caso do método Quasi-Newton, que se situaria entre os dois anteriores.

O maior problema destes algoritmos matemáticos é que não existe nenhuma garantia da obtenção de um ponto extremo global, ou seja, o algoritmo convergirá para o extremo local mais próximo da direção de busca determinada pelas derivadas. Por esta razão, tais algoritmos são mais convenientemente empregados para problemas *unimodais*, aqueles que apresentam apenas um extremo no intervalo considerado.

A aplicação destes algoritmos para problemas *multimodais* não é tão simples, já que a solução encontrada dependerá do ponto de partida inicial, podendo na maioria das vezes se encontrar uma solução extrema local muito “pior” que a solução ótima global desconhecida e procurada. Os Algoritmos Genéticos representam uma classe de ferramentas muito versátil e robusta a ser empregada na solução de problemas de otimização, embora não devam ser considerados estritamente extremizadores de funções. Assim como outros métodos, por não empregarem o cálculo de derivadas, mas sim atuarem diretamente na busca das soluções no espaço viável, ele é classificado como método direto ou de ordem zero.

Outra grande diferença dos métodos clássicos para os Algoritmos Genéticos é que estes não se prendem tão facilmente a extremos locais, uma vez que se trabalha com uma população de indivíduos e se realiza a busca dentro de toda a região viável disponível.

## **2.8.3 – Vantagens e desvantagens dos AGs**

### **2.8.3.1 – Vantagens**

Segundo Silva (2001), os AGs tem sido empregados em problemas complicados de otimização em que, muitas vezes, os demais métodos falham. Algumas vantagens são:

- Funcionam tanto com parâmetros contínuos como discretos ou uma combinação deles.
- Realizam buscas simultâneas em varias regiões do espaço de busca, pois trabalham com uma população e não com um único ponto.

- Utilizam informações de custo ou recompensa e não derivadas ou outro conhecimento auxiliar.
- Otimizam um número grande de variáveis.
- Otimizam parâmetros de funções objetivos com superfície complexas e complicadas, reduzindo a incidência de mínimos locais.
- Adaptam-se bem a computadores paralelos.
- Trabalham com uma codificação do conjunto de parâmetros e não com os próprios parâmetros.
- São fáceis de serem implementados em computadores.
- São modulares e portáteis, no sentido que o mecanismo de evolução é separado da representação particular do problema considerado. Assim, eles podem ser transferidos de um problema para outro.
- São flexíveis para trabalhar com restrições arbitrárias e otimizar múltiplas funções com objetivos conflitantes.
- São também facilmente hibridizados com outras técnicas heurísticas.
- São robustos e aplicáveis a uma grande variedade de problemas.
- São mais resistentes a se prenderem a ótimos locais.
- Apresentam um bom desempenho para uma grande escala de problemas.

Apesar dessas vantagens, os AGs não são eficientes para muitos problemas. São bastante lentos. O principal campo de aplicação dos AGs é em problemas complexos, com múltiplos mínimos/máximos e para os quais não existe um algoritmo de otimização eficiente conhecido para resolvê-los.

### **2.8.3.2 – Desvantagens**

As principais desvantagens do AGs estão apresentadas nos itens abaixo:

- Dificuldade para achar o ótimo global exato.
- Requerem um grande número de avaliações das funções de aptidão e suas restrições.
- Grandes possibilidades de configurações podendo complicar a resolução.

### 2.8.4 – Critérios de Parada

Diversos critérios podem ser adotados para o fim da otimização, alguns são:

- Quando o AG atingir um número limite de gerações;
- Quando não houver uma melhora significativa no valor da função desejada;

Términos prematuros podem levar a redução da confiabilidade do AG. Por outro lado finalizações conservadoras podem aumentar o custo computacional.

### 2.8.5 – Representação e Codificação

As representações das variáveis podem ser do tipo binária, de números reais ou inteiros, sendo a primeira a mais utilizada. Otimização com variáveis reais podem ser convertidos para valores binários de comprimento fixo, sendo necessário posteriormente fazer o caminho inverso para avaliar a função de aptidão.

Definidas as variáveis de projeto deve-se formar o cromossomo, que são compostos de unidades ou elementos, cada elemento equivale a um gene, dispostos em uma seqüência linear. A Figura 19 exemplifica o exposto:

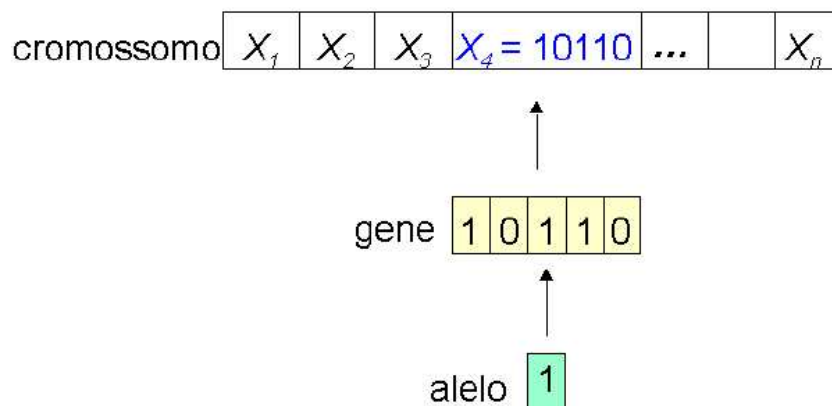


Figura 19: Esquematização de um cromossomo.  
Adaptado: Saramago (2003)

### 2.8.6 – População inicial

A população inicial de cromossomos geralmente é feita de maneira aleatória. Adota-se sub-rotinas que geram números aleatórios no intervalo (0,1) uniformemente.

Usando a probabilidade, tem-se que se o indivíduo for de baixa adequabilidade, tem alta probabilidade de desaparecer da população, caso contrário, os indivíduos terão grandes chances de permanecer na população.

### 2.8.7 – Reprodução

Reprodução é um processo que será atribuído às cadeias que possuem o maior valor objetivo e, portanto uma probabilidade mais elevada de contribuir a geração seguinte, criando pelo menos um descendente. Quanto maior o valor da função objetivo, maiores são as chances do indivíduo sobreviver no ambiente e reproduzir-se passando parte de seu material genético a gerações posteriores (BRAGA 1990, apud SARAMARGO 2003).

Usando a probabilidade, tem-se que se o indivíduo for de baixa adequabilidade, tem alta probabilidade de desaparecer da população, caso contrário, os indivíduos terão grandes chances de permanecer na população, como expressa a equação a seguir:

$$P_i = \frac{f(x)}{F(x)}, \text{ sendo } F(x) = \sum f(x)$$

### 2.8.8 – Cruzamento

O objetivo deste operador é criar um indivíduo através de dois pais através da combinação de partes de seus cromossomos

A quantidade de cromossomos a ser submetida ao processo de cruzamento é definida através da probabilidade de cruzamento, especificada pelo usuário. Cada cadeia é partida neste ponto, e todas as informações no cromossomo A, a partir do ponto escolhido são copiados para o cromossomo B e vice-versa, conforme na Figura 20.

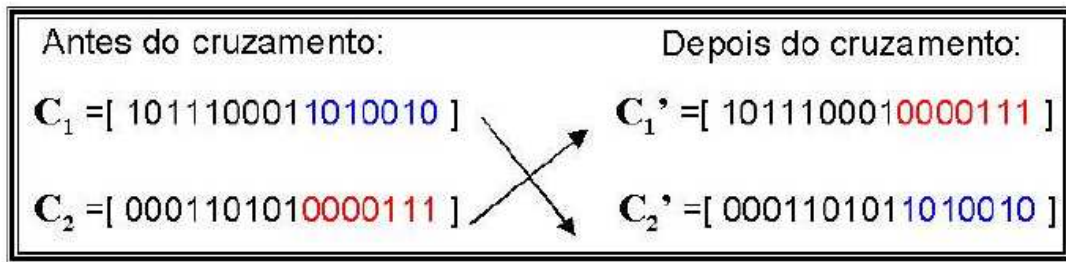


Figura 20: Representação do operador cruzamento.  
Adaptado: Saramago (2003)

O processo de escolha de quem será cruzado deve ser feito em pares, sorteando números randômicos. Quando não for possível formar os pares um novo sorteio deverá ser feito até obter os pares necessários para o cruzamento. Na maioria das literaturas especializadas, a probabilidade de cruzamento é de 25%.

### 2.8.9 – Mutação

O operador de mutação é necessário para introduzir novas características e manter a diversidade genética na população, assim fornecendo novos elementos para a mesma.

A mutação é uma modificação aleatória do valor de um alelo da cadeia. Caso o alelo escolhido seja zero passa a ser um e vice-versa, conforme esquematizado na Figura 21.

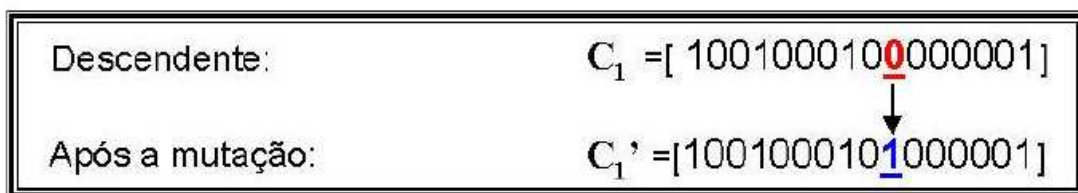


Figura 21: Representação do operador mutação.  
Adaptado: Saramago (2003).

### 2.8.10 – Estrutura dos algoritmos genéticos

Em geral, os mais aptos são selecionados e os menos aptos são descartados (darwinismo). Os membros selecionados podem sofrer modificações em suas características fundamentais através dos operadores de cruzamento e mutação, gerando descendentes para a próxima geração. Este processo é repetido até que uma solução satisfatória seja encontrada. O Algoritmo do Quadro 5 e a Figura 22 a seguir mostram este procedimento:

Quadro 5: Algoritmo Genético Genérico.

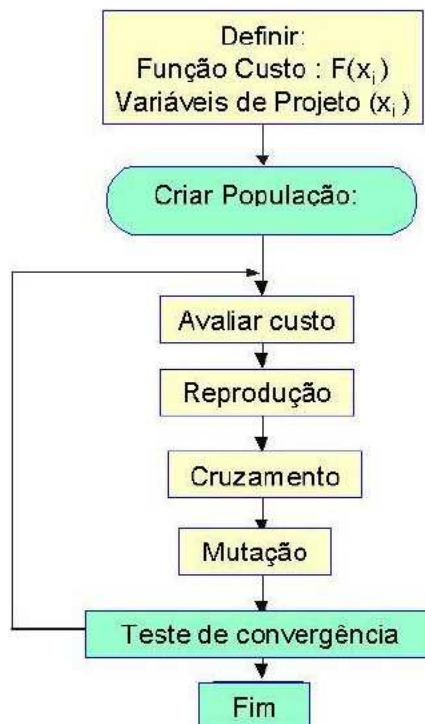
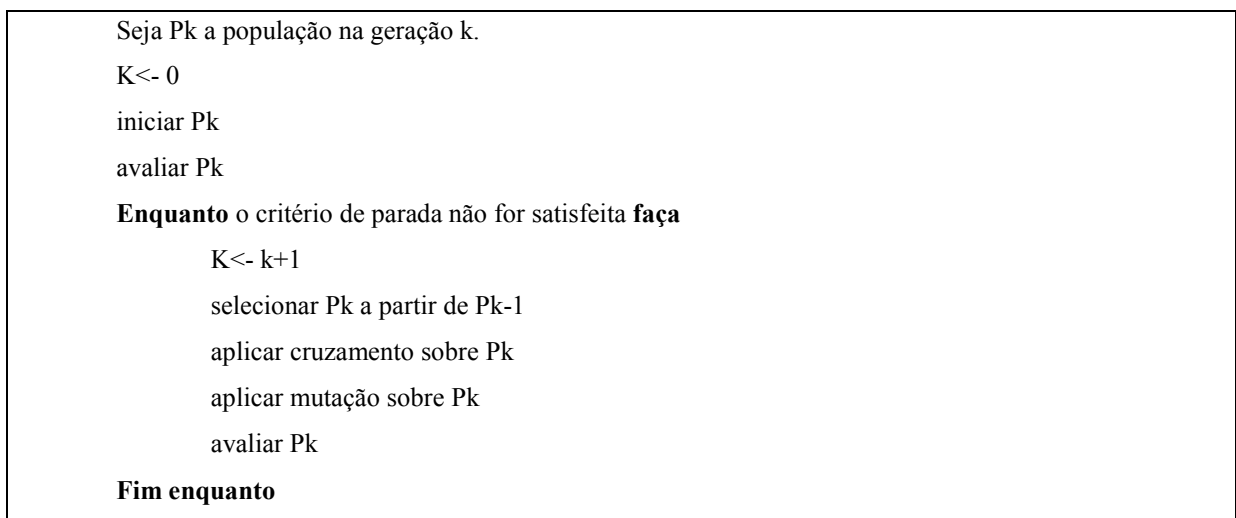


Figura 22: Fluxograma algoritmo genético.  
Adaptado: Saramago (2003).



### 2.8.11 - Discussão

Outras aplicações dos Algoritmos Genéticos para a resolução de problemas de otimização são possíveis e têm sido utilizadas, tais como:

- gerenciamento de carteiras de ações, desenvolvimento de estratégias para leilões, detecção de fraudes em movimentos na bolsa de valores, dentre outras na área de economia e finanças;
- modelagem e estudo de problemas em Ecologia, genética populacional e na relação entre aprendizagem do indivíduo e evolução da espécie;
- construção automática de programas para a realização de tarefas específicas e outras estruturas computacionais como redes neurais;
- criação de imagens, texturas, músicas e estruturas complexas;
- mineração de dados (Data Mining);

Pelas suas características de robustez e flexibilidade de implementação, acredita-se que os Algoritmos Genéticos irão ganhar uma maior atenção com o decorrer do tempo, principalmente, pela rápida evolução dos computadores que deverão tornar as aplicações desta técnica cada vez mais viáveis e interessantes.

Serão desenvolvidas novas idéias e estratégias, aprimoradas e difundidas no meio técnico, aumentando o número de aplicações e trazendo novos benefícios na resolução dos problemas já conhecidos.

Para problemas de otimização as vantagens do emprego de Algoritmos Genéticos são consideráveis, principalmente pela sua versatilidade na obtenção de soluções ótimas globais, enquanto espera-se que suas desvantagens desapareçam com uma maior consolidação da técnica e com o avanço da informática.

### 3. METODOLOGIA

#### 3.1 – Classificação do Estudo

Este estudo classifica-se como sendo quantitativo, por utilizar dados numéricos para diferenciar os custos das estruturas analisadas (vigas), e por comparar a eficiência dos mesmos.

#### 3.2 – Procedimento de Modelagem

O dimensionamento de uma viga de concreto armado de seção retangular foi feito utilizando-se as prescrições da NBR6118 resumidas na referência de Marchetti e Botelho. Desta forma a Tabela 1 foi largamente utilizada neste trabalho.

Resume-se a seguir a otimização do custo, a partir da busca direta.

Primeiramente definiram-se os principais parâmetros que interferem no dimensionamento da viga, sendo eles: altura e largura da viga, resistência característica, tipo de aço.

O programa ou sub-rotina montado em ambiente MATLAB inicialmente faz uma varredura na altura da viga entre 20cm e 100cm com passo definido para qualquer valor. Definiu-se neste caso para melhor visualização das curvas geradas um passo de 1cm.

Para cada altura foram consideradas três resistências características ( $f_{ck}$ ) do concreto 20MPa, 25MPa e 30MPa, e para cada  $f_{ck}$  dois tipos de aço, CA50 e CA60. Em todos os casos a sua largura foi pré-fixada.

Resume-se o número  $N_{TOTAL}$  total de casos para um tipo de viga a partir da expressão a seguir:

$$N_{TOTAL} = N_h \cdot N_{fck} \cdot N_{CA} \cdot N_{bw}$$

Onde:

$N_h$ : número de alturas analisadas = 81

$N_{fck}$ : número de  $f_{ck}$  considerados = 3

$N_{CA}$ : número de tipos de aço = 2

$N_{bw}$ : número de larguras da viga = 2

Em função dos valores anteriores o  $N_{TOTAL} = 972$  casos.

Foram investigados três tipos de vigas e quatro carregamentos, desta forma, o número final de casos é de 11664.

Inseriu-se um algoritmo de modelagem de vigas no software matemático MATLAB v7.0. A otimização por busca direta deu-se pelos seguintes passos:

O primeiro passo consiste em alimentar o programa com os dados de entrada, sendo eles: preço do aço, concreto e de forma em kg/m, kg/m<sup>3</sup> e m<sup>2</sup>, respectivamente; largura da viga (bw) em metros, carregamento (q) em kN/m, módulo de elasticidade (E) em kPa e comprimento da viga (L) em metros.

O segundo passo consistiu em variar-se a altura da viga de 20cm a 100cm, o tipo de aço CA50 e CA60 e a resistência característica do concreto  $f_{ck}$  igual a 20MPa, 25MPa e 30MPa, para analisar a influência dos principais parâmetros de dimensionamentos de uma viga em concreto armado.

A viga foi avaliada a verificações de normas como ruptura a compressão e flecha máxima. No entanto, o estado de fissuração da mesma não foi considerado. Neste passo, qualquer altura que gerasse, para um dado carregamento, um momento resistente a compressão inferior ao momento solicitante, seria descartada da continuação do programa. Da mesma forma, ocorreu para a verificação de flecha.

Faz-se, então, o dimensionamento da viga a partir da identificação dos valores de  $k_6$ , com os respectivos valores de  $k_3$  ambos retirados da Tabela 1. Esta tabela foi gerado em arquivo para implementação do programa em ambiente MATLAB e Maple. Para extrair os valores da tabela citada, calcula-se o valor de  $k_6$  pela equação citada, a partir do qual se percorre a coluna correspondente na tabela. Adota-se o valor igual ou imediatamente inferior ao  $k_6$  tabelado.

Em seguida, tem-se a identificação do custo para o melhor arranjo entre uma bitola específica e seu número de barras. O menor custo é calculado após o corte das barras.

A posição de corte é avaliada calculando-se um incremento de momento solicitante, que deve ser descontado do valor máximo de momento até o seu valor mínimo do diagrama de momento fletor. O incremento é obtido dividindo-se o momento máximo  $M_d$  pelo número de barras mais uma unidade.

Para cada valor de momento obtido, encontram-se as posições longitudinais das seções da viga, correspondentes aquele valor de momento. O cálculo é feito a partir da solução da equação de momento, um polinômio de segundo grau no caso de carregamento uniformemente distribuído, gerando sempre duas soluções para as seções com momentos positivos e uma solução para os trechos com os momentos negativos.

Com os valores das posições, acrescidos do comprimento de decalagem mais o comprimento de ancoragem são indicados os pontos de corte das barras, gerando como custo final, o menor deles, como ilustrado na Figura 23.

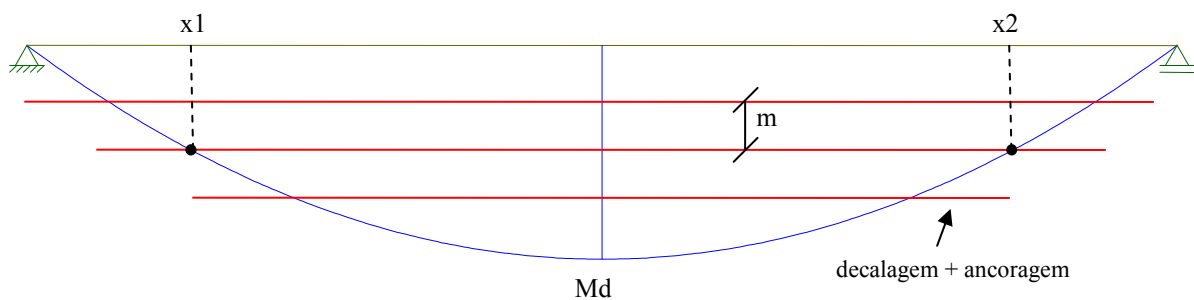


Figura 23: Representação esquemática do corte das barras longitudinais.

Os pontos mostrados na Figura 23 indicam os valores de momento na equação correspondente, cujas raízes fornecem a posição da seção ao longo do eixo da viga, sujeita aquele valor de momento.

O ponto de corte pode ser obtido a partir da diferença entre  $x_1$  e  $x_2$  mais a decalagem e a ancoragem necessária correspondente, o cálculo da decalagem e ancoragem é mostrado a seguir:

$$\text{decalagem} = 0,5 \cdot d$$

$$f_{ctm} = 0,3 \sqrt[3]{f_{ck}^2}$$

$$f_{ct_{inf}} = 0,7 \cdot f_{ctm}$$

$$f_{ctd} = \frac{f_{ct_{inf}}}{\alpha_c}$$

$$f_{bd} = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot f_{ctd}$$

$$l_b = \frac{\phi}{4} \cdot \frac{f_y d}{f_{bd}}$$

Onde:

$n_1 = 1,0$  para barras lisas;

$n_1 = 1,4$  para barras entalhadas;

$n_1 = 2,25$  para barras nervuradas;

$n_2 = 1,0$  para situações de boa aderência;

$n_2 = 0,7$  para situações de má aderência;

$n_3 = 1,0$  para  $\varphi < 32$  mm;

$n_3 = (132 - \varphi)/100$ , para  $\varphi \geq 32$  mm;

$Fbd$ = Resistência de aderência de cálculo da armadura passiva;

$Fctd$ = Tensão limite de tração do concreto;

$lb$ = Ancoragem necessária.

Neste algoritmo também foi inserida uma sub-rotina, com a técnica de algoritmos genéticos para otimização da estrutura.

A implementação seguiu o roteiro clássico ou padrão de um algoritmo genético, o qual se resume em reprodução, cruzamento e mutação, procedimentos definidos anteriormente. A função objetivo foi definida pelo custo final referente ao material gasto em uma viga de concreto armado.

Para definir a função custo, levaram-se em conta os custos com material para a execução da viga, incluindo nestes custos a armadura longitudinal, o concreto e as formas.

Obtém-se, dessa forma, a seguinte equação:

$$\text{Custo} = (bw \cdot h) \cdot L \cdot C_c + A_s \cdot \rho_s \cdot LL \cdot C_s + (bw + 2h) \cdot L \cdot C_f$$

Onde:

$bw$ : largura da seção transversal da viga;

$h$ : altura da viga;

$L$ : comprimento da viga;

$A_s$ : área de aço obtida pelo dimensionamento da seção;

$\rho_s$ : massa específica do aço;

LL: corresponde ao somatório do comprimento das barras, já identificados os pontos de corte;

Cc: é o custo do concreto usinado por unidade de volume, comercialmente utilizado na região central do estado do Rio Grande do Sul;

Cs: é o custo do material aço por unidade volume, vendido na região noroeste do estado;

Cf: é o custo por área, estimado de formas.

O Quadro 6 a seguir resume os valores dos custos utilizados.

Quadro 6: Custos de materiais

<b>Concreto</b>		<b>Aço (R\$/kg)</b>		<b>Forma (R\$/m<sup>2</sup>)</b>
fck (MPa)	(R\$/m <sup>3</sup> )	<b>CA 50</b>	<b>CA 60</b>	
20	260,00	5,00	6,00	50,00
25	275,00	5,00	6,00	50,00
30	285,00	5,00	6,00	50,00

Os valores mostrados no Quadro 6 também foram utilizados para a montagem da avaliação do custo utilizado na sub-rotina de busca direta.

### 3.3 – Materiais e Equipamentos utilizados na pesquisa

Notebook HP dv9548.

Software matemático MATLAB para implementação de AGs.

Software Mapple 8

Normas de Concreto Armado, exemplo: NBR6118.

Softwares diversos (editores de texto, planilhas de cálculo).

### 3.3.1 – Descrição do Software MATLAB v7.0

MATLAB é um "software" interativo de alto desempenho voltado para o cálculo numérico. O MATLAB integra análise numérica, cálculo com matrizes, processamento de sinais e construção de gráficos em ambiente fácil de usar onde problemas e soluções são expressos somente como eles são escritos matematicamente, ao contrário da programação tradicional.

O MATLAB é um sistema interativo cujo elemento básico de informação é uma matriz que não requer dimensionamento. Esse sistema permite a resolução de muitos problemas numéricos em apenas uma fração do tempo que se gastaria para escrever um programa semelhante em linguagem Fortran, Basic ou C. Além disso, as soluções dos problemas são expressas no MATLAB quase exatamente como elas são escritas matematicamente.

### 3.4 – Plano de Análise e Interpretação de Dados

O principal item analisado foi o custo da estrutura (viga) otimizada, ou seja, a obtenção de seções mínimas de aço e concreto para uma estrutura que satisfaça princípios básicos de segurança, com respeito aos estados limites de ruptura e de utilização, e a imposições de normas técnicas.

Uma vez implementadas as sub-rotinas de otimização (busca direta e algoritmo genético), o plano de estudo consistiu em dimensionar três tipos de vigas, simplesmente apoiada, apoiada e engastada e bi-engastada, para uma série de valores de altura da viga, sempre avaliando o custo obtido, conforme metodologia descrita anteriormente.

Com os resultados obtidos, fez-se uma análise entre a eficiência e os custos da estrutura otimizada, para um conjunto de valores de carregamento, fck e tipo de aço. A comparação se deu através da variação do custo em função da altura da viga, área de aço em gráficos bi e tridimensionais e para melhor identificação do comportamento do custo em função de tais parâmetros.

A eficiência foi obtida pela razão entre o esforço solicitante e o esforço resistente a compressão da viga (MUC), ambos promovidos pelo momento fletor.

A seguir são apresentados os principais resultados obtidos com o programa.

## 4. ANÁLISE DOS RESULTADOS

Apresentam-se os principais resultados obtidos, inicialmente para os três tipos de vigas estudadas, utilizando-se o método de busca direta, para diferentes valores de carregamento uniforme e parâmetros como tipo de aço e resistência característica do concreto. E posteriormente apresenta-se um caso avaliado com algoritmo genético.

O Quadro 7 resume os dados de entrada para todos os casos investigados, numa codificação que corresponde ao valor do carregamento – representado pelos símbolos “x”, “o”, “□” e “\*”. A leitura dos códigos é feita, por exemplo, da seguinte maneira: um “x” verde significa que corresponde ao carregamento  $q = 10 \text{ kN/m}$ , para uma  $f_{ck} = 25$  e o tipo de aço igual a CA60.

Quadro 7 – Codificação dos casos avaliados

		q= 10kN/m	q= 20kN/m	q= 40kN/m	q= 80kN/m
símbolo		x	o	□	*
cor					
●		CA50 fck20	CA50 fck20	CA50 fck20	CA50 fck20
●		CA50 fck25	CA50 fck25	CA50 fck25	CA50 fck25
●		CA50 fck30	CA50 fck30	CA50 fck30	CA50 fck30
●		CA60 fck20	CA60 fck20	CA60 fck20	CA60 fck20
●		CA60 fck25	CA60 fck25	CA60 fck25	CA60 fck25
●		CA60 fck30	CA60 fck30	CA60 fck30	CA60 fck30

### 4.1 – MÉTODO DE BUSCA DIRETA

Em seguida, resumem-se os exemplos das vigas otimizadas com o método de busca direta.



### 4.1.1 – Viga bi-apoiada

O primeiro exemplo investigado refere-se a uma viga bi-apoiada, com carregamento uniformemente distribuído e comprimento  $L$ , conforme ilustrada na Figura 24.

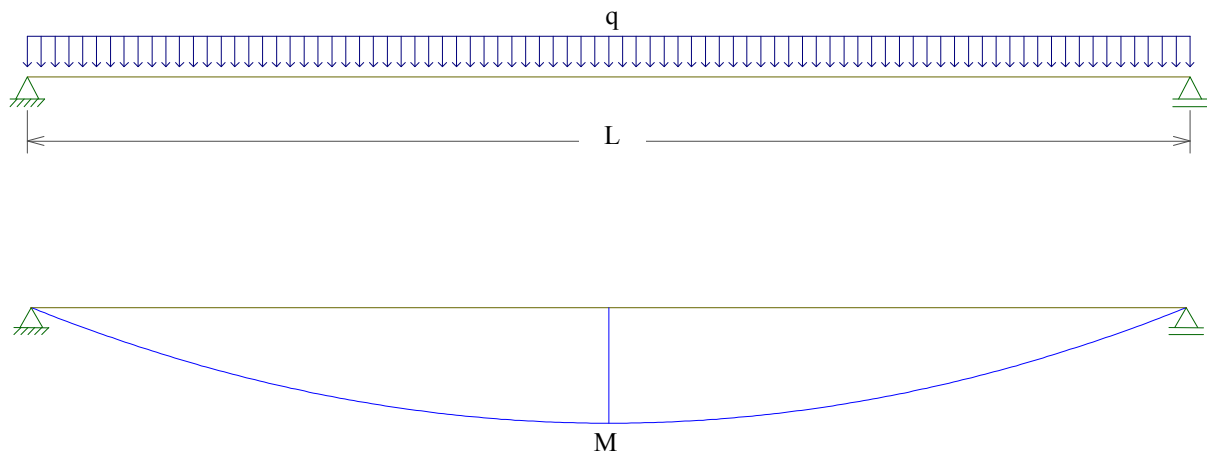


Figura 24 – Representação esquemática da viga bi-apoiada.

Onde:  $L= 6\text{m}$        $q=$  carga uniforme (kN/m)       $M=$  momento fletor

A Figura 25 a seguir mostra os resultados obtidos da busca direta contendo: relação custo da viga versus  $A_s$  versus altura da mesma.

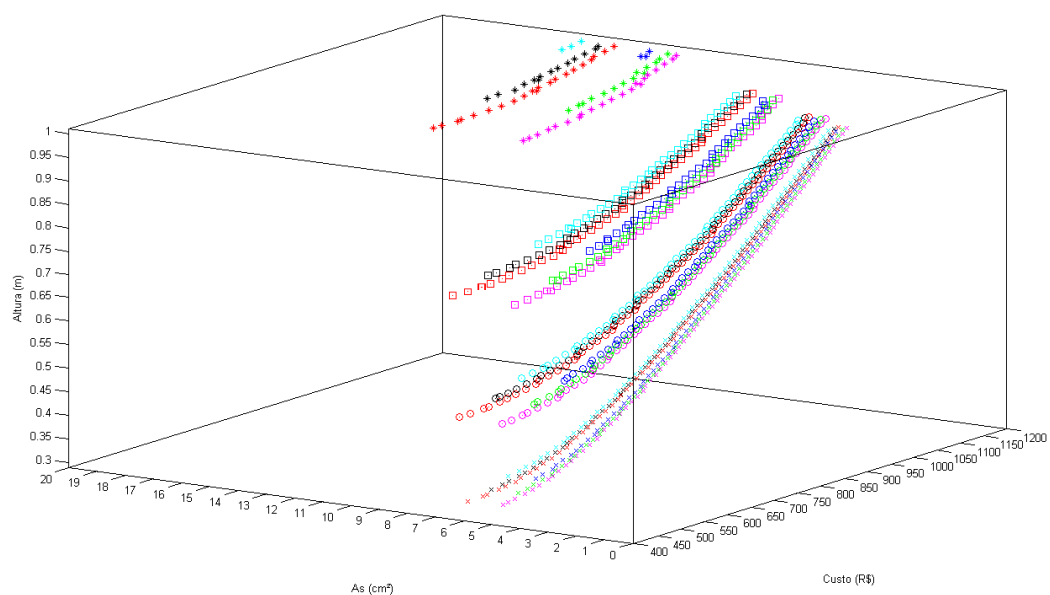


Figura 25: Variação do custo em função do  $A_s$  e altura,  $b_w=15\text{cm}$ .

Da Figura 25 pode-se observar que, quanto maior a altura  $h$  menor será o  $A_s$ , consequentemente tem-se maior volume de concreto, implicando num maior custo da viga, e vice-versa. O fator predominante no custo da viga é a altura ou volume de concreto.

As Figuras 26, 27, 28 seguintes auxiliam para um melhor entendimento das afirmações acima.

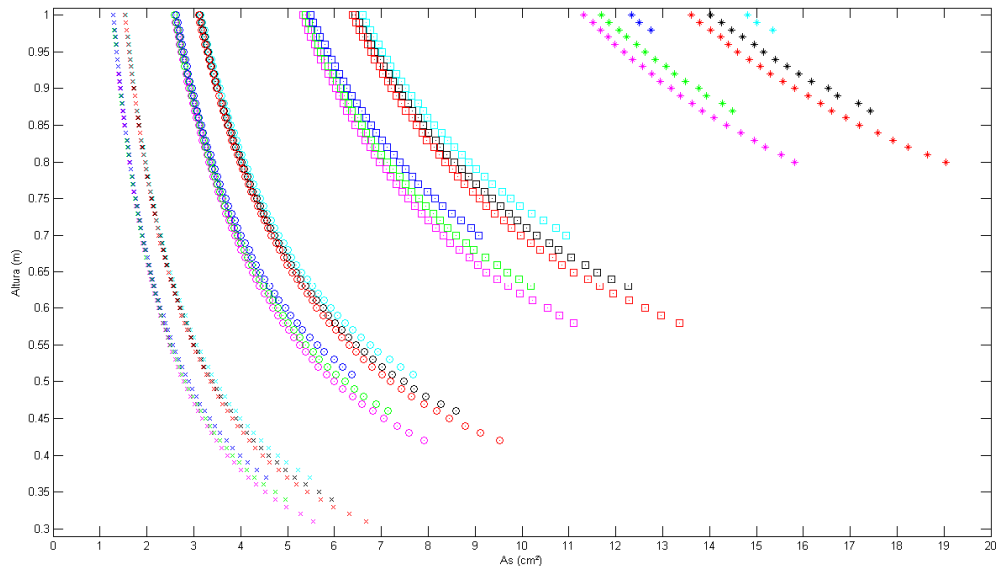


Figura 26: Variação do  $A_s$  com a altura,  $b_w=15\text{cm}$ .

Na figura 26 acima, a relação entre altura e área de aço está compatível com a formulação de dimensionamento de vigas de concreto armado.

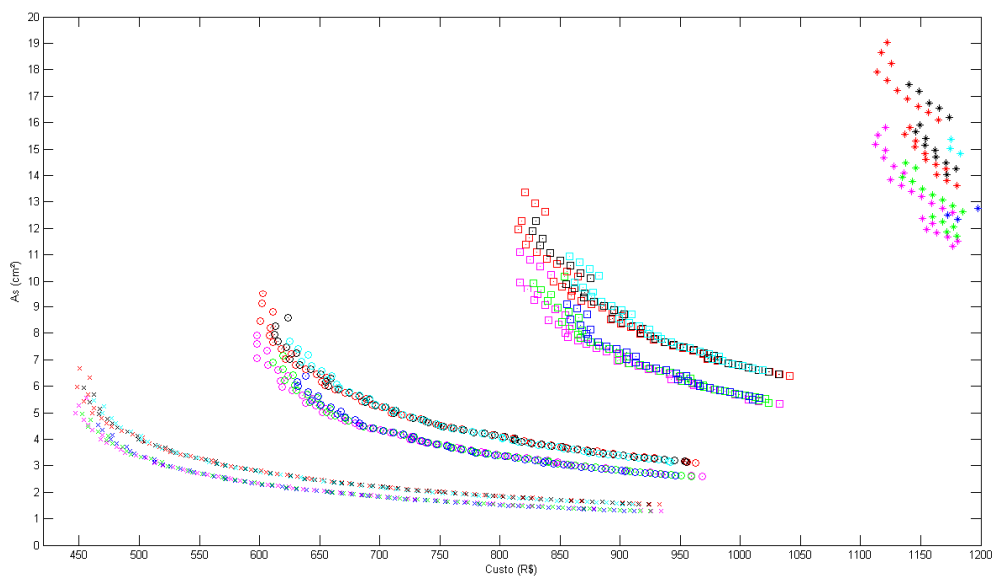


Figura 27: Variação do custo versus  $A_s$ ,  $b_w=15\text{cm}$ .

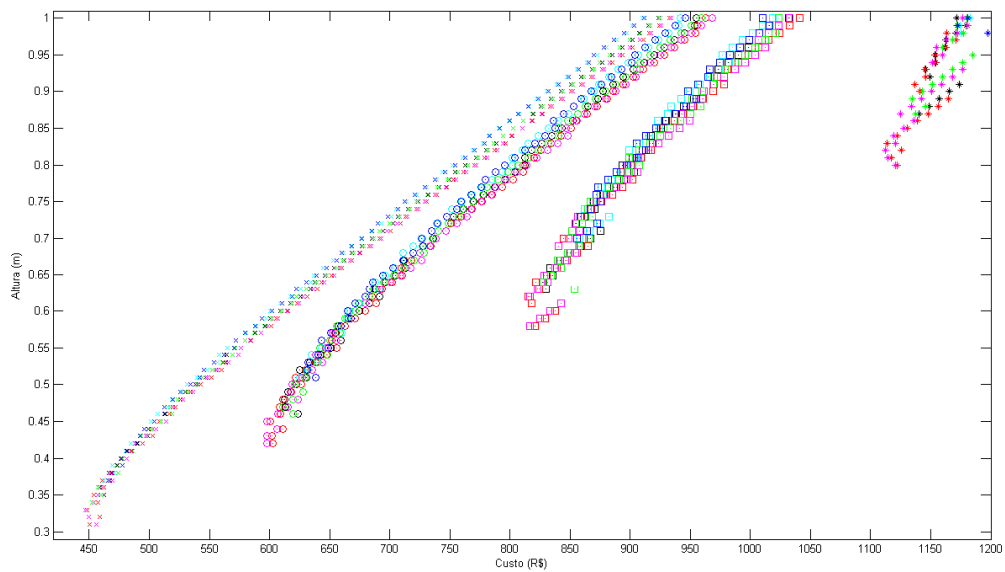


Figura 28: Variação do custo com a altura,  $b_w=15\text{cm}$ .

Em alguns pontos há uma pequena redução no custo com uma altura da viga ligeiramente maior. Isto se deve a uma pequena redução de  $A_s$  (área de aço), levando com que o número e bitola das barras sejam diferentes. Assim, escolhendo-se um maior número de barras com uma bitola menor e fazendo-se os devidos cortes nas barras obtém-se um custo da viga um pouco menor do que a altura do passo anterior.

A Figura 29 ilustra o custo em função da eficiência.

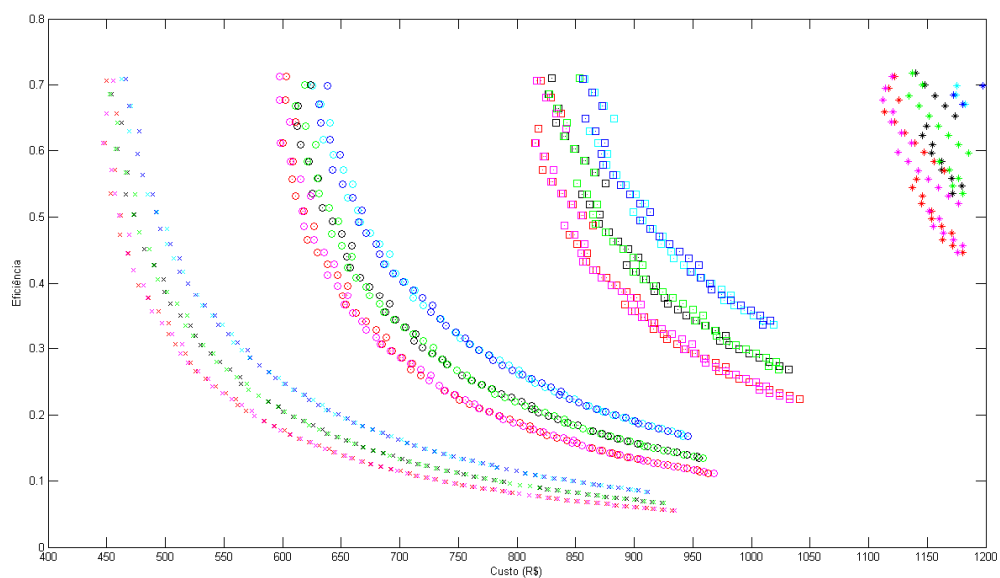


Figura 29: Variação custo versus eficiência,  $b_w=15\text{cm}$ .

As Tabelas 2, 3, 4, 5 mostram resultados de alguns pontos mínimos encontrados na busca de otimização pelo método direto, com os seus respectivos carregamentos para  $b_w=15\text{cm}$ .

Tabela 2: Mínimos custos com seus respectivos dimensionamentos  $q=10\text{ kN/m}$

<b>h (cm)</b>	<b>Bitola (mm)</b>	<b>N barra</b>	<b>As (cm<sup>2</sup>)</b>	<b>CA</b>	<b>fck</b>	<b>Menor Custo</b>
33	8	10	4,981	60	30	R\$ 446,80
33	16	3	5,974	50	30	R\$ 448,60
32	10	7	5,271	60	30	R\$ 449,90
31	10	9	6,683	50	30	R\$ 450,20
34	8	10	4,950	60	25	R\$ 452,40
35	10	7	5,429	50	30	R\$ 453,70
34	12,5	4	4,740	60	30	R\$ 453,90
34	16	3	5,940	50	25	R\$ 454,10
31	16	3	5,550	60	30	R\$ 455,80
34	16	3	5,700	50	30	R\$ 457,20
35	10	6	4,529	60	30	R\$ 457,20
36	8	9	4,486	60	25	R\$ 457,50
36	10	7	5,386	50	25	R\$ 459,00
35	12,5	4	4,732	60	25	R\$ 459,40
36	8	9	4,331	60	30	R\$ 460,70
37	8	10	4,990	50	30	R\$ 461,10
36	10	7	5,189	50	30	R\$ 462,30
35	16	3	5,675	50	25	R\$ 462,60
37	10	7	5,468	50	20	R\$ 462,60

Tabela 3: Mínimos custos com seus respectivos dimensionamentos  $q=20\text{ kN/m}$

<b>h (cm)</b>	<b>Bitola (mm)</b>	<b>N barra</b>	<b>As (cm<sup>2</sup>)</b>	<b>CA</b>	<b>fck</b>	<b>Menor Custo</b>
42	16	4	7,910	60	30	R\$ 597,60
43	22	2	7,592	60	30	R\$ 597,70
45	10	9	7,046	60	30	R\$ 598,20
45	12,5	7	8,451	50	30	R\$ 600,60
43	20	3	9,115	50	30	R\$ 602,30
42	25	2	9,521	50	30	R\$ 602,90
44	22	2	7,335	60	30	R\$ 606,30
46	10	9	6,814	60	30	R\$ 606,80
47	16	4	7,911	50	30	R\$ 608,10
46	12,5	7	8,185	50	30	R\$ 609,20
44	20	3	8,797	50	30	R\$ 610,80
47	10	9	6,886	60	25	R\$ 611,10
48	10	10	7,650	50	30	R\$ 611,10
48	15	4	7,956	50	25	R\$ 612,40
47	12,5	7	8,267	50	25	R\$ 613,60
47	10	9	6,593	60	30	R\$ 615,30

Tabela 4: Mínimos custos com seus respectivos dimensionamentos  $q=40$  kN/m

<b>h (cm)</b>	<b>Bitola (mm)</b>	<b>N barra</b>	<b>As (cm<sup>2</sup>)</b>	<b>CA</b>	<b>fck</b>	<b>Menor Custo</b>
62	16	6	11,948	50	30	R\$ 815,50
62	16	5	9,962	60	30	R\$ 816,40
58	22	3	11,100	60	30	R\$ 816,50
61	20	4	12,284	50	30	R\$ 818,30
58	16	7	13,366	50	30	R\$ 820,60
64	22	3	11,400	50	30	R\$ 821,80
63	16	6	11,654	50	30	R\$ 824,00
59	22	3	10,800	60	30	R\$ 825,10
64	16	6	11,910	50	25	R\$ 826,90
64	16	5	9,930	60	25	R\$ 827,80
59	16	7	12,960	50	30	R\$ 829,20
63	20	4	12,264	50	25	R\$ 829,80

Tabela 5: Mínimos custos com seus respectivos dimensionamentos  $q=80$  kN/m

<b>h (cm)</b>	<b>Bitola (mm)</b>	<b>N barra</b>	<b>As (cm<sup>2</sup>)</b>	<b>CA</b>	<b>fck</b>	<b>Menor Custo</b>
82	22	4	15,184	60	30	R\$ 1.112,00
83	16	9	17,909	50	30	R\$ 1.113,00
81	20	5	15,522	60	30	R\$ 1.114,00
81	22	5	18,654	50	30	R\$ 1.117,00
84	25	3	14,670	60	30	R\$ 1.119,00
80	32	2	15,821	60	30	R\$ 1.120,00
83	22	4	14,947	60	30	R\$ 1.121,00
84	16	9	17,595	50	30	R\$ 1.122,00
80	32	2	15,821	60	30	R\$ 1.122,00
87	16	7	13,836	60	30	R\$ 1.125,00
82	22	5	18,230	50	30	R\$ 1.126,00
85	25	3	14,355	60	30	R\$ 1.128,00
85	16	9	17,200	50	30	R\$ 1.131,00

Conforme esperado, a altura da viga aumenta com o carregamento, conseqüentemente o custo também.

A partir das tabelas acima, pode-se observar que há diversos arranjos possíveis de escolha com um custo baixo para uma determinada viga e um determinado carregamento que atendem princípios básicos de segurança, com respeito aos estados limites de ruptura e de utilização, e a imposições de normas técnicas.

O fck mais utilizado que oriunda menores custos foi o fck30, mesmo ele sendo o mais caro. Isso se deve ao menor volume de concreto devido a maior resistência da peça.

Os valores descritos acima não foram muito diferentes daqueles obtidos quando se levou em conta a largura da viga em 20cm. Os menores custos obtidos com largura da viga igual a 20cm são em torno de 5% maiores comparados com a largura de 15cm, por ter maior volume de concreto..

A figura 30 a seguir mostra resultados obtidos com  $b_w=20$ .

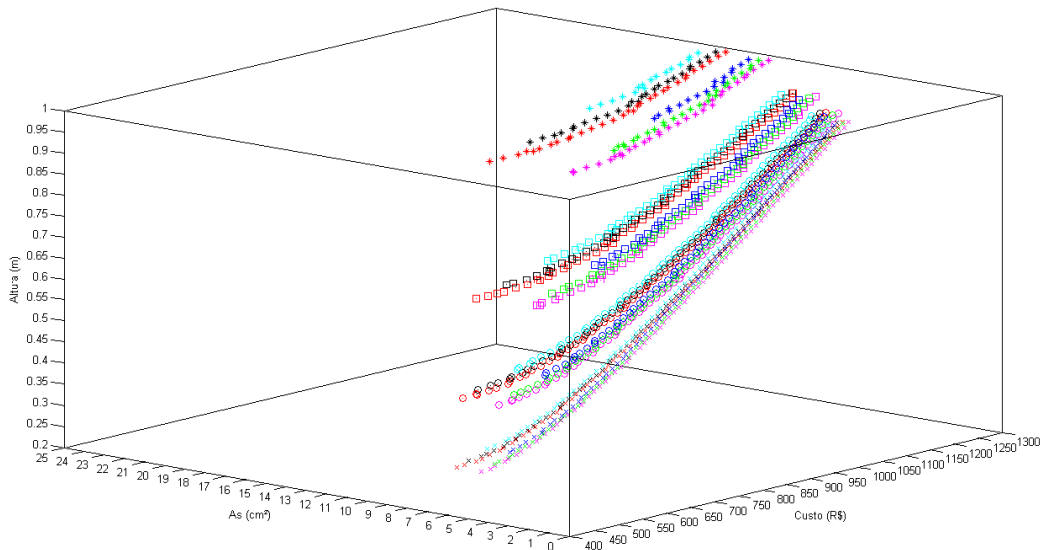


Figura 30: Variação do custo em função do As e altura,  $b_w=20$ cm.

As tabelas 6, 7, 8, 9 abaixo mostram resultados de alguns pontos mínimos encontrados na busca de otimização pelo método direto, com os seus respectivos carregamentos para  $b_w=20$ cm.

Tabela 6: Mínimos custos com seus respectivos dimensionamentos  $q=10$  kN/m

h (cm)	Bitola (mm)	N barra	As (cm <sup>2</sup> )	CA	fck	Menor Custo
29	10	9	6,930	50	30	R\$ 472,80
30	10	7	5,469	60	30	R\$ 473,50
28	20	2	6,168	60	30	R\$ 476,20
28	22	2	7,406	50	30	R\$ 477,30
29	16	3	5,778	60	30	R\$ 478,50
30	10	9	6,853	50	25	R\$ 478,70
31	20	2	6,216	50	30	R\$ 478,90
31	10	7	5,400	60	25	R\$ 479,20
32	8	10	4,950	60	30	R\$ 480,60
30	10	9	6,577	50	30	R\$ 482,20
32	16	3	5,930	50	30	R\$ 482,40
31	10	7	5,183	60	30	R\$ 482,90
30	16	3	5,711	60	25	R\$ 484,40
32	20	2	6,139	50	25	R\$ 484,50
33	12,5	4	4,857	60	25	R\$ 484,70

Tabela 7: Mínimos custos com seus respectivos dimensionamentos  $q=20$  kN/m

<b>h (cm)</b>	<b>Bitola (mm)</b>	<b>N barra</b>	<b>As (cm<sup>2</sup>)</b>	<b>CA</b>	<b>fck</b>	<b>Menor Custo</b>
39	16	5	10,003	50	30	R\$ 627,40
40	16	4	7,975	60	30	R\$ 629,70
39	12,5	7	8,331	60	30	R\$ 631,80
40	16	5	10,050	50	25	R\$ 632,10
41	10	10	7,662	60	30	R\$ 632,40
41	16	4	8,003	60	25	R\$ 634,20
40	25	2	9,575	50	30	R\$ 635,00
43	12,5	7	8,561	50	30	R\$ 635,20
37	20	3	9,082	60	30	R\$ 635,60
40	12,5	7	8,350	60	25	R\$ 636,50
42	10	10	7,673	60	25	R\$ 636,90
37	22	3	10,936	50	30	R\$ 637,20
44	12,5	7	8,550	50	25	R\$ 639,40
42	20	3	9,213	50	25	R\$ 639,60
41	25	2	9,608	50	25	R\$ 639,60
42	22	2	7,389	60	30	R\$ 640,10

Tabela 8: Mínimos custos com seus respectivos dimensionamentos  $q=40$  kN/m

<b>h (cm)</b>	<b>Bitola (mm)</b>	<b>N barra</b>	<b>As (cm<sup>2</sup>)</b>	<b>CA</b>	<b>fck</b>	<b>Menor Custo</b>
53	16	6	11,975	60	30	R\$ 847,00
54	16	7	13,860	50	30	R\$ 847,50
52	20	4	12,337	60	30	R\$ 851,20
55	22	3	11,258	60	30	R\$ 852,80
51	20	5	15,357	50	30	R\$ 853,00
52	22	4	14,812	50	30	R\$ 853,40
53	25	3	14,363	50	30	R\$ 854,60
54	16	6	11,556	60	30	R\$ 856,40
55	16	7	13,517	50	30	R\$ 856,90
58	20	4	12,433	50	30	R\$ 857,20
55	16	6	11,788	60	25	R\$ 859,30
56	16	7	13,707	50	25	R\$ 859,70
56	22	3	10,938	60	30	R\$ 862,30

Tabela 9: Mínimos custos com seus respectivos dimensionamentos  $q=80$  kN/m

<b>h (cm)</b>	<b>Bitola (mm)</b>	<b>N barra</b>	<b>As (cm<sup>2</sup>)</b>	<b>CA</b>	<b>fck</b>	<b>Menor Custo</b>
74	16	10	20,005	50	30	R\$ 1.154,00
70	20	7	21,872	50	30	R\$ 1.155,00
71	16	9	17,838	60	30	R\$ 1.158,00
75	25	4	19,521	50	30	R\$ 1.158,00
77	20	5	15,583	60	30	R\$ 1.161,00
79	16	9	18,048	50	30	R\$ 1.162,00
71	20	7	21,438	50	30	R\$ 1.164,00
76	16	10	20,100	50	25	R\$ 1.164,00
77	22	5	18,740	50	30	R\$ 1.164,00

#### 4.1.2 – Viga apoiada e engastada

O segundo exemplo investigado refere-se a uma viga apoiada e engastada, com carregamento uniformemente distribuído e comprimento  $L$ , conforme ilustrada na Figura 31.

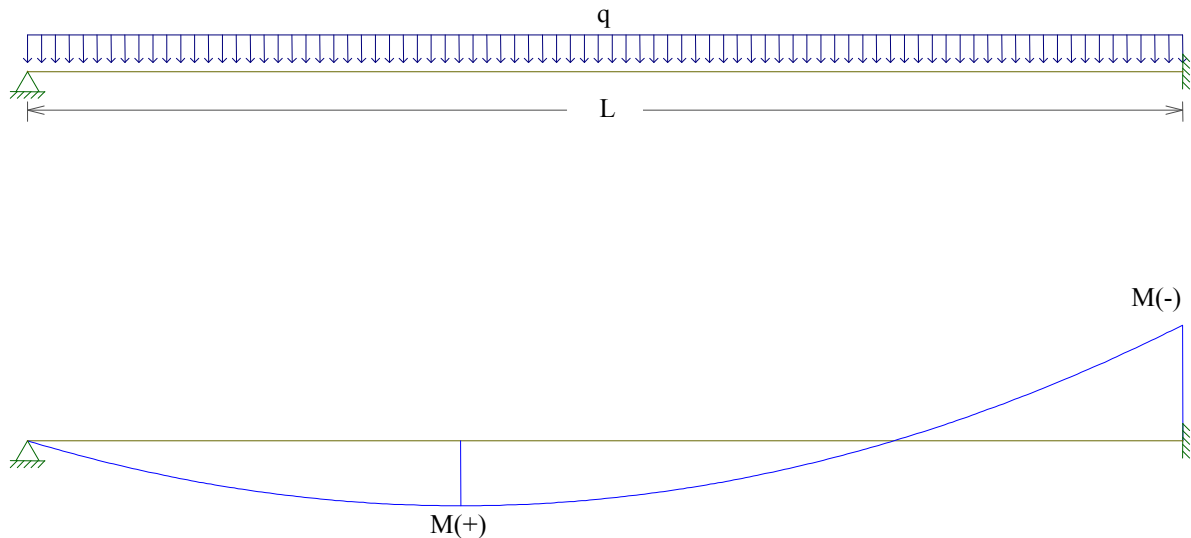


Figura 31 – Representação esquemática da viga apoiada e engastada

O procedimento de corte das barras para este tipo de viga é semelhante ao da viga bi-apoiada (Figura 23), exceto na região de momento negativo, na qual se considera apenas a raiz do domínio da viga.

Onde:  $L = 6\text{m}$

$q$  = carga uniforme (kN/m)

$M(+)$  = momento fletor positivo

$M(-)$  = momento fletor negativo

As Figuras 32, 33, 34 a seguir mostram os resultados obtidos da busca direta, contendo: relações entre custo da viga, altura da viga e área de aço.



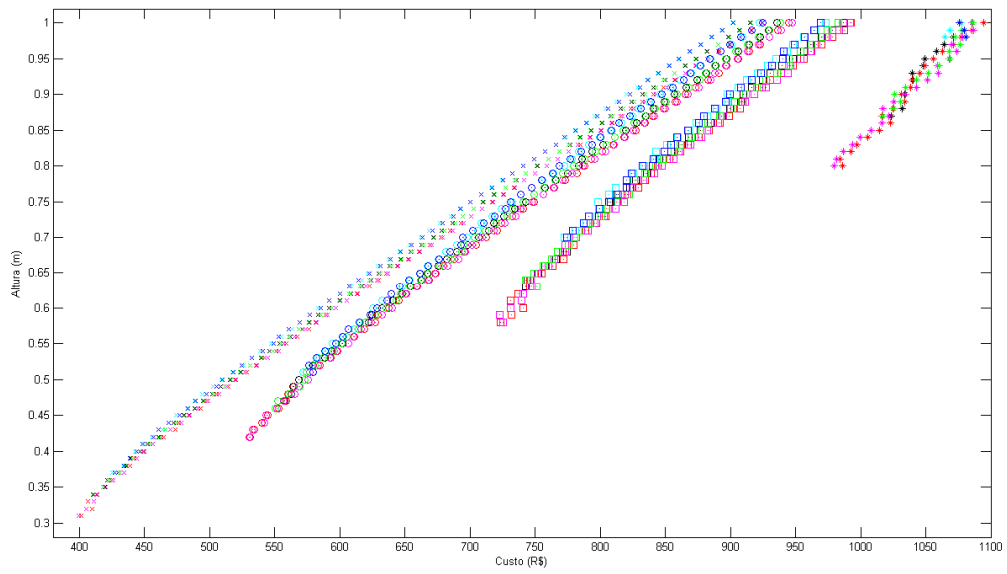


Figura 32: Variação do custo com a altura,  $b_w=15\text{cm}$ .

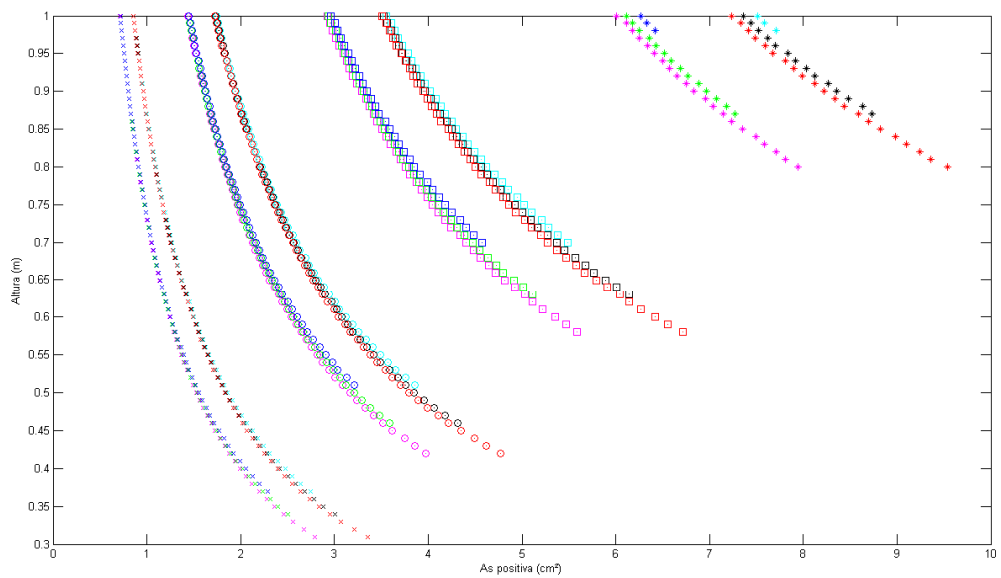


Figura 33: As positiva vs Altura,  $b_w=15\text{cm}$ .

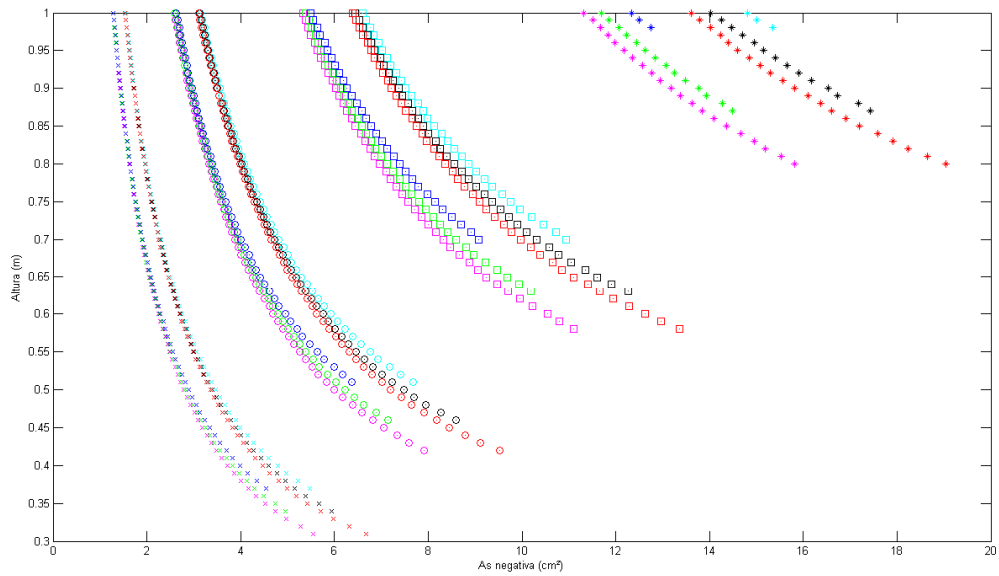


Figura 34:  $A_s$  negativa vs Altura,  $b_w=15\text{cm}$ .

Como visto anteriormente, tem-se o mesmo comportamento de custo em função da altura e do  $A_s$ , onde o fator predominante no custo da viga é a altura ou o volume de concreto.

A Figura 35 abaixo apresenta uma relação entre área de aço positiva e negativa.

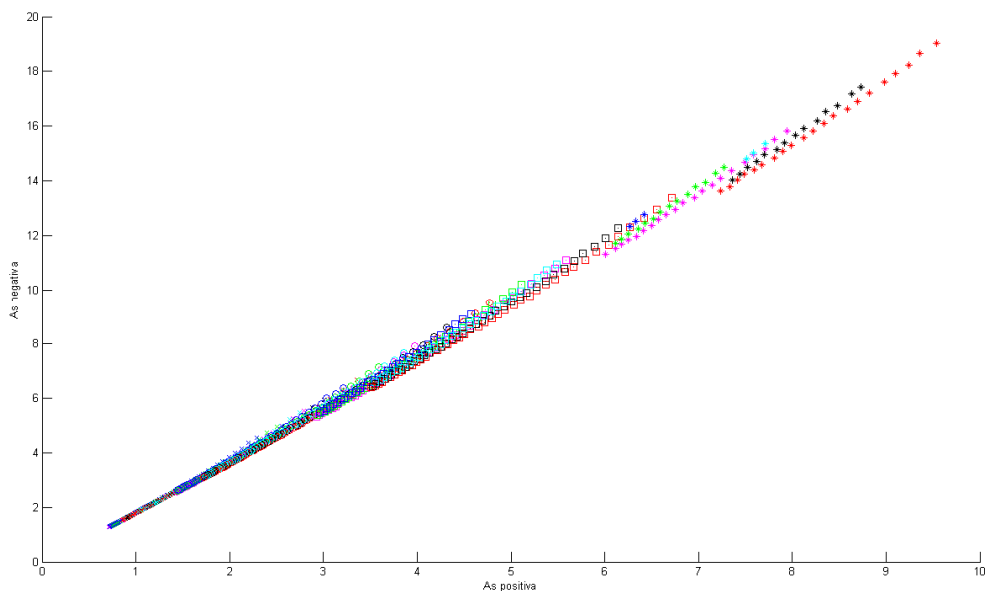


Figura 35:  $A_s$  positiva vs  $A_s$  negativa,  $b_w=15\text{cm}$ .

Observando a Figura 35, percebe-se que a área de aço positiva em função da área de aço negativa possui aproximadamente a mesma proporção.

A Figura 36 ilustra o custo em função da eficiência.

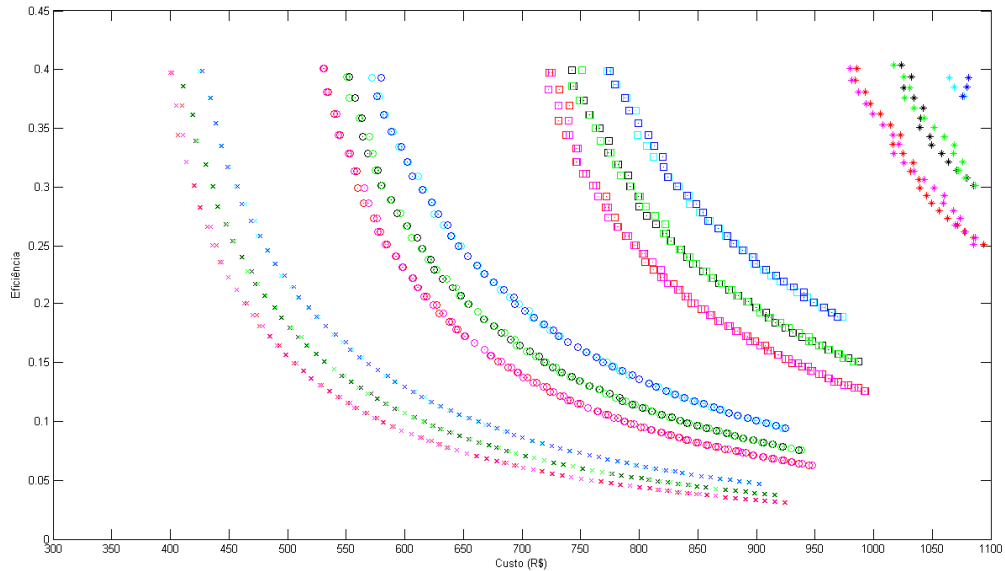


Figura 36: Custo vs eficiência, bw=15cm.

Observa-se na Figura 36 que a eficiência é menor que a da viga bi-apoiada. Isto se deve ao fato de ocorrer uma redistribuição dos momentos, os quais reduzem mais do que as seções das vigas, conseqüentemente o esforço resistente.

As Tabelas 10, 11, 12, 13 abaixo mostram resultados de alguns pontos mínimos encontrados na busca de otimização pelo método direto, com os seus respectivos carregamentos para a viga apoiada e engastada com bw=15cm.

Tabela 10: Mínimos custos com seus respectivos dimensionamentos  $q=10$  kN/m

h (cm)	Bitola (mm)	N barra	As+ (cm <sup>2</sup> )	Bitola (mm)	N barra	As- (cm <sup>2</sup> )	CA	fck	Menor Custo
31	6,3	9	2,793	16	3	5,550	60	30	R\$ 399,70
31	8	7	3,356	10	9	6,683	50	30	R\$ 401,50
32	6,3	9	2,676	10	7	5,271	60	30	R\$ 405,20
33	6,3	10	3,072	16	3	5,974	50	30	R\$ 406,70
32	8	7	3,209	10	9	6,316	50	30	R\$ 410,10
34	8	6	3,003	16	3	5,940	50	25	R\$ 410,90
33	6,3	9	2,557	8	10	4,981	60	30	R\$ 411,00
34	8	5	2,505	8	10	4,950	60	25	R\$ 411,30
34	8	5	2,463	12,5	4	4,740	60	30	R\$ 413,50
34	8	6	2,953	16	3	5,700	50	30	R\$ 413,90

Tabela 11: Mínimos custos com seus respectivos dimensionamentos  $q=20$  kN/m

h (cm)	Bitola (mm)	N barra	As+ (cm <sup>2</sup> )	Bitola (mm)	N barra	As- (cm <sup>2</sup> )	CA	fck	Menor Custo
42	16	2	3,970	16	4	7,910	60	30	R\$ 530,60
42	12,5	4	4,770	25	2	9,521	50	30	R\$ 531,50
43	10	5	3,855	22	2	7,592	60	30	R\$ 533,40
43	10	6	4,621	20	3	9,115	50	30	R\$ 534,80
44	8	9	4,493	20	3	8,797	50	30	R\$ 540,00
44	10	5	3,746	22	2	7,335	60	30	R\$ 542,00
45	12,5	3	3,617	10	9	7,046	60	30	R\$ 543,70
45	8	9	4,346	12,5	7	8,451	50	30	R\$ 544,70
46	12,5	3	3,592	22	2	7,135	60	25	R\$ 550,80

Tabela 12: Mínimos custos com seus respectivos dimensionamentos  $q=40$  kN/m

h (cm)	Bitola (mm)	N barra	As+ (cm <sup>2</sup> )	Bitola (mm)	N barra	As- (cm <sup>2</sup> )	CA	fck	Menor Custo
59	10	7	5,467	22	3	10,800	60	30	R\$ 722,80
58	10	9	6,712	16	7	13,366	50	30	R\$ 732,60
58	16	3	5,587	22	3	11,100	60	30	R\$ 725,70
61	20	2	6,270	20	4	12,284	50	30	R\$ 731,20
60	10	7	5,351	22	3	10,543	60	30	R\$ 731,40
59	10	9	6,553	16	7	12,960	50	30	R\$ 732,10
62	20	2	6,144	16	6	11,948	50	30	R\$ 737,40
61	10	7	5,222	22	3	10,231	60	30	R\$ 740,00
60	10	9	6,418	16	7	12,632	50	30	R\$ 740,70
62	10	7	5,115	16	5	9,996	60	30	R\$ 740,70

Tabela 13: Mínimos custos com seus respectivos dimensionamentos  $q=80$  kN/m

h (cm)	Bitola (mm)	N barra	As+ (cm <sup>2</sup> )	Bitola (mm)	N barra	As- (cm <sup>2</sup> )	CA	fck	Menor Custo
80	16	4	7,940	32	2	15,821	60	30	R\$ 979,70
81	10	10	4,810	20	5	15,522	60	30	R\$ 981,50
81	20	3	9,362	22	5	18,654	50	30	R\$ 984,30
80	25	2	9,538	25	4	19,042	50	30	R\$ 986,00
82	10	10	7,710	22	4	15,184	60	30	R\$ 987,00
82	20	3	9,242	22	5	18,230	50	30	R\$ 992,80
83	22	2	7,587	22	4	14,946	60	30	R\$ 993,90
83	20	3	9,100	16	9	17,900	50	30	R\$ 997,20
84	22	2	7,492	25	3	14,670	60	30	R\$ 999,40
84	20	3	8,986	16	9	17,590	50	30	R\$ 1.006,00
85	22	2	7,350	25	3	14,355	60	30	R\$ 1.008,00

Novamente o fck mais utilizado que originou menores custos é o fck30.

Reforçando os resultados anteriores, os menores custos obtidos com largura da viga igual a 20cm são em torno de 5% maiores, quando comparados com os custo da viga de largura de 15cm.

A figura 37 a seguir mostra resultados obtidos com  $bw=20$ .

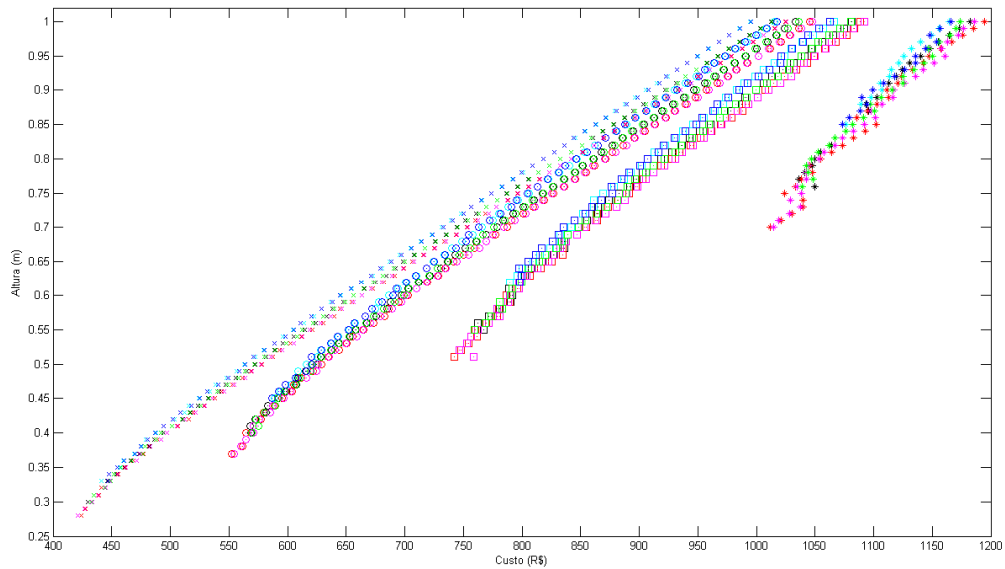


Figura 37: Variação do custo em função da altura  $h$ ,  $bw=20$ .

As tabelas 14, 15, 16, 17 abaixo mostram resultados de alguns pontos mínimos encontrados na busca de otimização pelo método direto, com os seus respectivos carregamentos para  $bw=20$ .

Tabela 14: Mínimos custos com seus respectivos dimensionamentos  $q=10$  kN/m

$h$ (cm)	Bitola (mm)	N barra	As+ (cm <sup>2</sup> )	Bitola (mm)	N barra	As- (cm <sup>2</sup> )	CA	fck	Menor Custo
28	10	4	3,132	20	2	6,168	60	30	R\$ 421,20
28	10	5	3,754	22	2	7,406	50	30	R\$ 423,70
29	8	6	2,976	16	3	5,778	60	30	R\$ 426,60
29	12,5	3	3,574	10	9	6,930	50	30	R\$ 427,40
30	8	7	3,466	10	9	6,853	50	25	R\$ 430,00
30	8	6	2,890	16	3	5,711	60	25	R\$ 432,40
30	8	6	2,842	10	7	5,470	60	30	R\$ 433,00
30	8	7	3,407	10	9	6,570	50	30	R\$ 433,60
31	6,3	9	2,756	10	7	5,400	60	25	R\$ 434,50

Tabela 15: Mínimos custos com seus respectivos dimensionamentos  $q=20$  kN/m

h (cm)	Bitola (mm)	N barra	As+ (cm <sup>2</sup> )	Bitola (mm)	N barra	As- (cm <sup>2</sup> )	CA	fck	Menor Custo
37	10	7	5,492	22	3	10,936	50	30	R\$ 552,10
37	10	6	4,571	20	3	9,081	60	30	R\$ 554,50
38	8	9	4,407	20	3	8,708	60	30	R\$ 559,90
38	10	7	5,285	22	3	10,456	50	30	R\$ 561,50
39	10	7	5,106	16	5	10,003	50	30	R\$ 564,50
40	8	10	4,950	25	2	9,575	50	30	R\$ 564,60
39	8	9	4,252	12,5	7	8,331	60	30	R\$ 564,70
41	12,5	4	4,871	25	2	9,608	50	25	R\$ 568,40
40	10	7	5,034	16	5	10,050	50	25	R\$ 569,10
40	8	9	4,190	12,5	7	8,350	60	25	R\$ 569,30

Tabela 16: Mínimos custos com seus respectivos dimensionamentos  $q=40$  kN/m

h (cm)	Bitola (mm)	N barra	As+ (cm <sup>2</sup> )	Bitola (mm)	N barra	As- (cm <sup>2</sup> )	CA	fck	Menor Custo
52	20	2	6,264	20	4	12,337	60	30	R\$ 746,50
52	22	2	7,509	22	4	14,812	50	30	R\$ 747,90
53	20	2	6,075	16	6	11,975	60	30	R\$ 753,10
53	22	2	7,294	25	3	14,363	50	30	R\$ 754,80
54	16	3	5,953	16	6	11,556	60	30	R\$ 756,90
55	16	3	5,916	16	6	11,788	60	25	R\$ 759,80
55	10	9	6,988	16	7	13,517	50	30	R\$ 759,90
54	22	2	7,148	16	7	13,860	50	30	R\$ 761,40
55	16	3	5,817	22	3	11,258	60	30	R\$ 762,10
56	10	9	6,931	16	7	13,707	50	25	R\$ 762,60
55	22	2	7,107	25	3	14,188	50	25	R\$ 767,10
56	16	3	5,783	16	6	11,423	60	25	R\$ 769,10
56	10	9	6,815	16	7	13,153	50	30	R\$ 769,30

Tabela 17: Mínimos custos com seus respectivos dimensionamentos  $q=80$  kN/m

h (cm)	Bitola (mm)	N barra	As+ (cm <sup>2</sup> )	Bitola (mm)	N barra	As- (cm <sup>2</sup> )	CA	fck	Menor Custo
70	22	3	10,984	20	7	21,873	50	30	R\$ 1.012,00
70	20	3	9,143	22	5	18,163	60	30	R\$ 1.014,00
71	20	3	8,976	16	9	17,838	60	30	R\$ 1.019,00
71	22	3	10,760	20	7	21,438	50	30	R\$ 1.021,00
75	16	5	10,040	25	4	19,521	50	30	R\$ 1.024,00
72	20	3	8,814	16	9	17,417	60	30	R\$ 1.028,00
74	12,5	7	8,505	16	9	16,663	60	30	R\$ 1.029,00
72	22	3	10,572	20	7	20,912	50	30	R\$ 1.031,00
76	16	5	9,900	25	4	19,150	50	30	R\$ 1.033,00
76	12,5	7	8,240	32	2	15,950	60	30	R\$ 1.035,00

### 4.1.3 – Viga bi engastada

O terceiro exemplo investigado refere-se a uma viga bi-engastada, com carregamento uniformemente distribuído e comprimento  $L$ , conforme ilustrada na Figura 38.

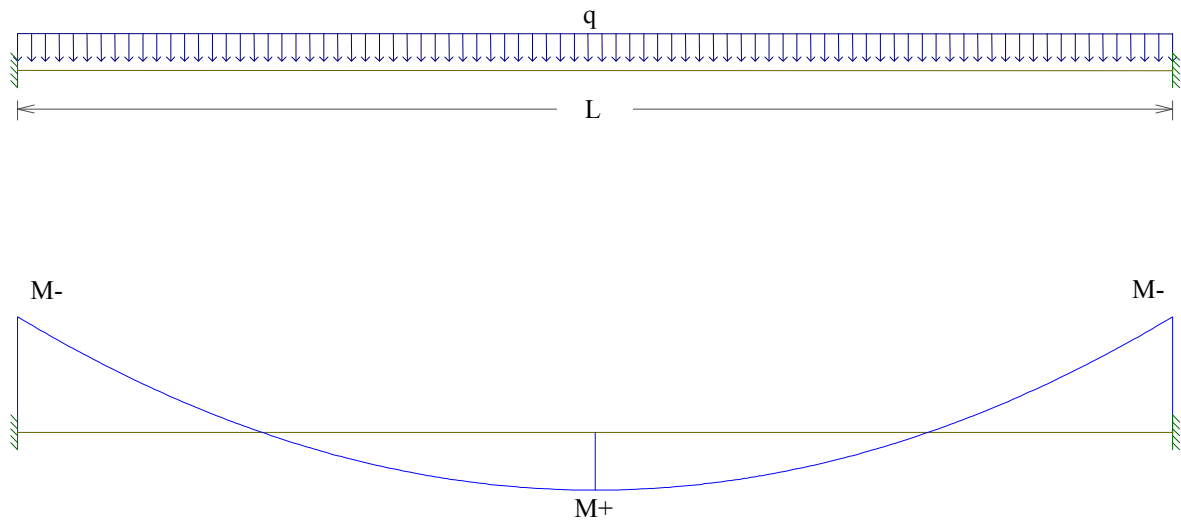


Figura 38 – Representação esquemática da viga bi-engastada.

Onde:

$$L = 6\text{m}$$

$q$  = carga uniforme (kN/m)

$M^+$  = momento fletor positivo

$M^-$  = momento fletor negativo

A Figura 39, 40, 41 a seguir mostram os resultados obtidos da busca direta contendo: relações entre custo da viga, altura da viga e área de aço.

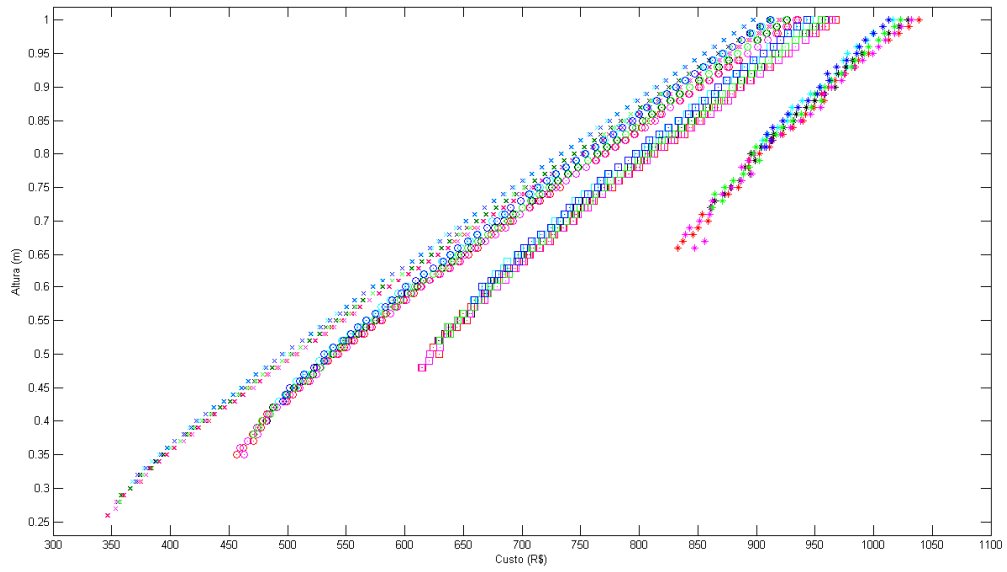


Figura 39: Custo vs Altura, bw=15cm.

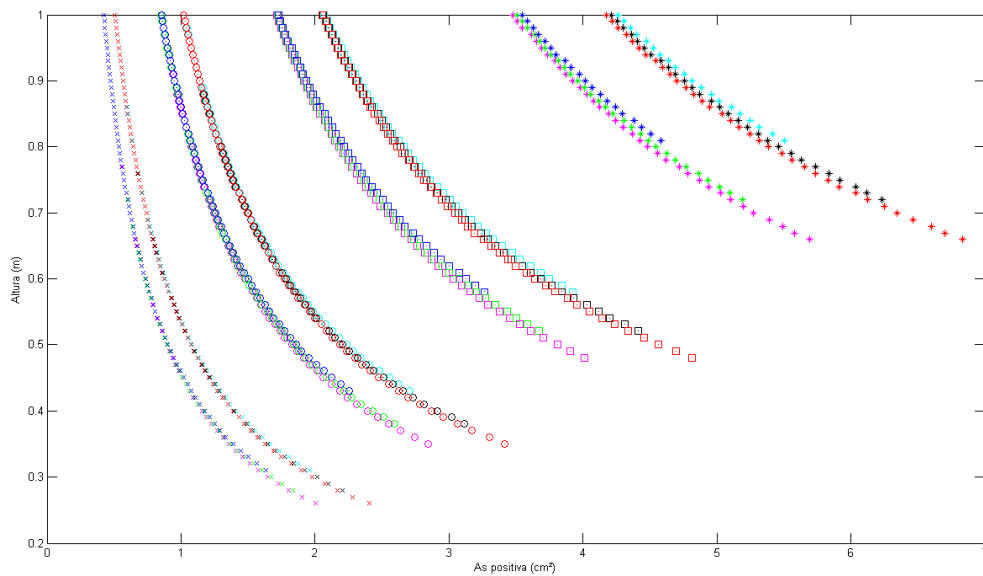


Figura 40: As positiva vs Altura, bw=15cm.



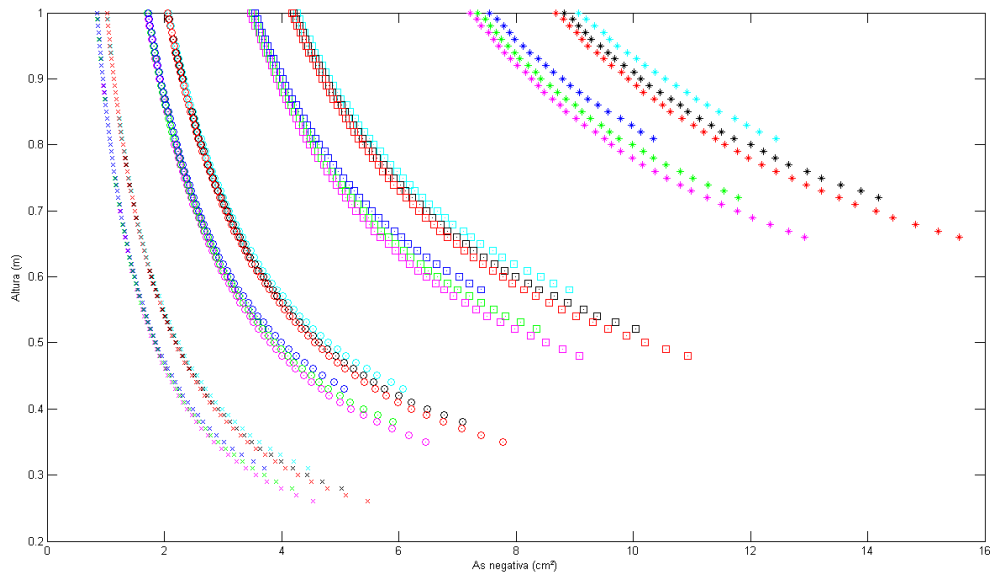


Figura 41: As negativa vs Altura, bw=15cm.

Como visto anteriormente temos a mesma variação de custo em função da altura e do As, onde o fator predominante no custo da viga é a altura ou o volume de concreto.

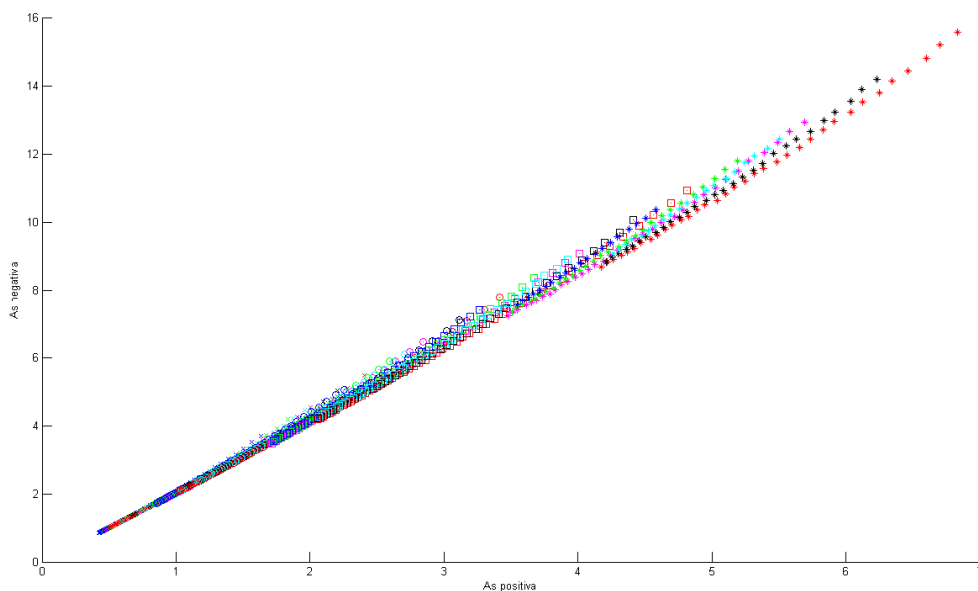


Figura 42: As positiva vs As negativa, bw=15cm.

Observando a Figura 42, percebe-se que a área de aço positiva em função da área de aço negativa possui aproximadamente a mesma proporção.

A Figura 43 a seguir indica a eficiência da viga bi-engastada.

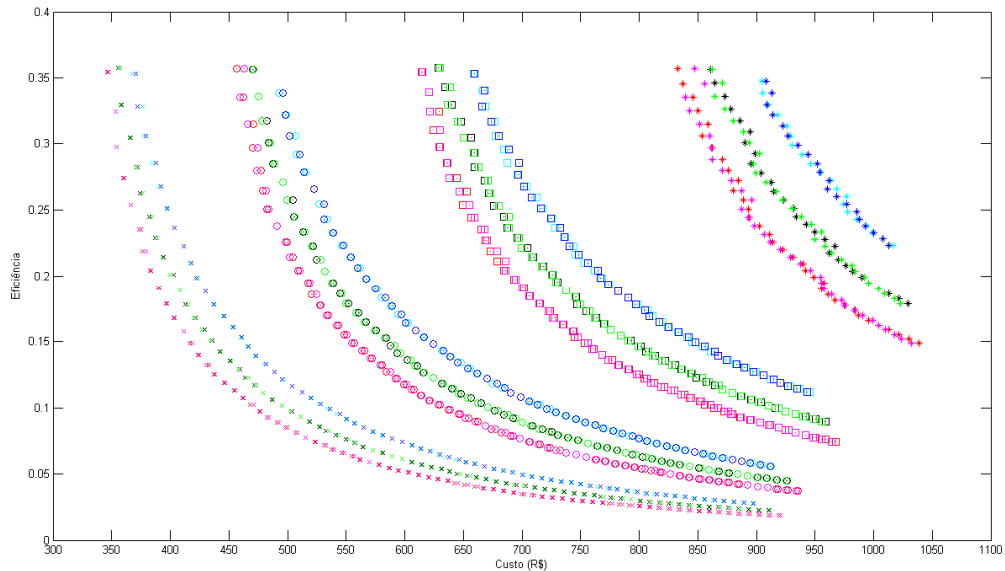


Figura 43: Custo vs eficiência,  $b_w=15\text{cm}$ .

Observa-se na Figura 43 que a eficiência é menor que a da viga bi-apoiada e da apoiada e engastada. Isto se deve ao fato de ocorrer uma redistribuição dos momentos, os quais reduzem mais do que as seções das vigas, conseqüentemente o esforço resistente.

As tabelas 18, 19, 20, 21 abaixo mostram resultados de alguns pontos mínimos encontrados na busca de otimização pelo método direto, com os seus respectivos carregamentos para  $b_w=15$ .

Tabela 18: Mínimos custos com seus respectivos dimensionamentos  $q=10\text{ kN/m}$

h (cm)	Bitola (mm)	N barra	As+ (cm <sup>2</sup> )	Bitola (mm)	N barra	As- (cm <sup>2</sup> )	CA	fck	Menor Custo
26	12,5	2	2,406	10	7	5,468	50	30	R\$ 346,20
26	8	4	2,004	10	6	4,541	60	30	R\$ 346,70
27	10	3	2,282	10	7	5,100	50	30	R\$ 353,30
27	8	4	1,904	8	9	4,252	60	30	R\$ 353,50
28	6,3	6	1,806	16	2	3,987	60	30	R\$ 354,10
28	10	3	2,206	8	10	5,025	50	25	R\$ 355,50
28	6,3	6	1,837	8	9	4,175	60	25	R\$ 357,20
29	5	9	1,752	10	5	3,912	60	25	R\$ 357,80
29	6,3	7	2,100	10	6	4,692	50	25	R\$ 358,60
29	6,3	7	2,070	8	9	4,512	50	30	R\$ 359,70
29	5	9	1,728	10	5	3,756	60	30	R\$ 360,40

Tabela 19: Mínimos custos com seus respectivos dimensionamentos  $q=20$  kN/m

h (cm)	Bitola (mm)	N barra	As+ (cm <sup>2</sup> )	Bitola (mm)	N barra	As- (cm <sup>2</sup> )	CA	fck	Menor Custo
35	8	7	3,416	10	10	7,780	50	30	R\$ 456,40
36	6,3	9	2,747	20	2	6,168	60	30	R\$ 459,60
36	8	7	3,300	22	2	7,406	50	30	R\$ 462,10
35	8	6	2,845	10	9	6,464	60	30	R\$ 463,20
37	6,3	9	2,636	16	3	5,890	60	30	R\$ 466,00
38	6,3	10	3,162	10	9	6,756	50	30	R\$ 470,20
38	6,3	10	3,115	22	2	7,094	50	25	R\$ 470,50
37	8	7	3,172	22	2	7,072	50	30	R\$ 470,70
38	6,3	9	2,594	16	3	5,894	60	25	R\$ 471,10

Tabela 20: Mínimos custos com seus respectivos dimensionamentos  $q=40$  kN/m

h (cm)	Bitola (mm)	N barra	As+ (cm <sup>2</sup> )	Bitola (mm)	N barra	As- (cm <sup>2</sup> )	CA	fck	Menor Custo
48	16	2	4,009	20	3	9,082	60	30	R\$ 614,20
48	12,5	4	4,713	22	3	10,936	50	30	R\$ 615,30
49	10	5	3,906	20	3	8,800	60	30	R\$ 620,50
49	10	6	4,693	22	3	10,56	50	30	R\$ 621,00
50	10	5	3,808	12,5	7	8,504	60	30	R\$ 621,30
51	8	9	4,455	16	5	9,881	50	30	R\$ 624,50
52	8	9	4,412	16	5	10,05	50	25	R\$ 628,50
52	12,5	3	3,612	16	4	7,975	60	30	R\$ 629,20
50	10	6	4,565	22	3	10,200	50	30	R\$ 629,50
51	10	5	3,702	12,5	7	8,246	60	30	R\$ 629,90
52	12,5	3	3,675	12,5	7	8,350	60	25	R\$ 630,30
52	8	9	4,337	25	2	9,575	50	30	R\$ 630,50

Tabela 21: Mínimos custos com seus respectivos dimensionamentos  $q=80$  kN/m

h (cm)	Bitola (mm)	N barra	As+ (cm <sup>2</sup> )	Bitola (mm)	N barra	As- (cm <sup>2</sup> )	CA	fck	Menor Custo
66	10	9	6,832	20	5	15,561	50	30	R\$ 833,30
67	10	9	6,705	22	4	15,200	50	30	R\$ 837,50
68	10	7	5,493	20	4	12,337	60	30	R\$ 839,30
69	10	7	5,390	16	6	12,037	60	30	R\$ 843,20
68	10	9	6,600	22	4	14,812	50	30	R\$ 846,00
66	16	3	5,690	16	7	12,930	60	30	R\$ 847,20
69	10	9	6,461	25	3	14,437	50	30	R\$ 850,30
70	10	7	5,273	16	6	11,782	60	30	R\$ 851,80
67	16	3	5,581	16	7	12,647	60	30	R\$ 855,70
70	10	9	6,345	25	3	14,145	50	30	R\$ 858,90

O fck mais utilizado que originou menores custos é o fck30.

Os menores custos obtidos com largura da viga igual a 20cm são em torno de 5% maiores comparados com a largura de 15cm.

A figura 44 a seguir mostra resultados obtidos com  $bw=20$ .

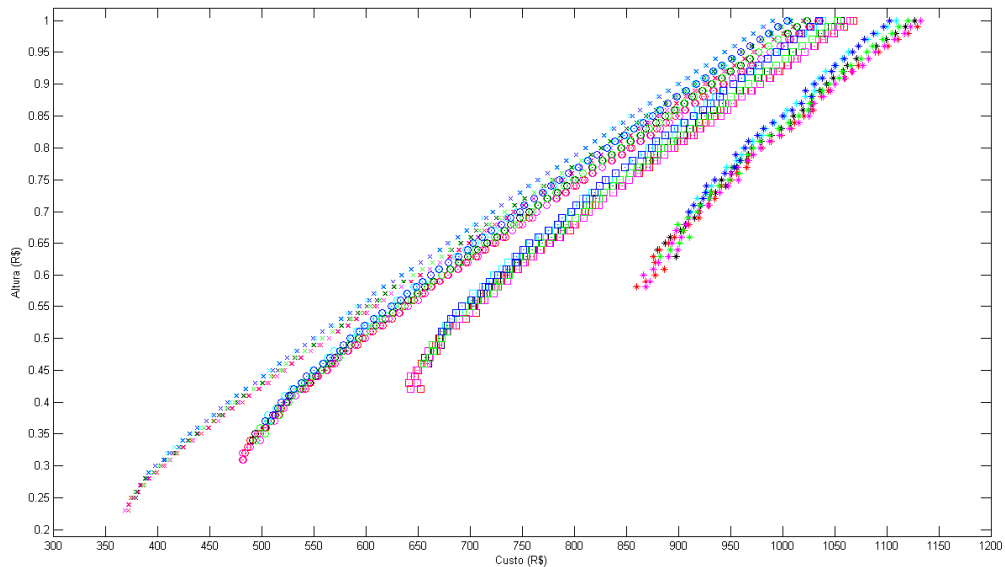


Figura 44: Variação do custo em função da altura,  $bw=20$ .

As tabelas 22, 23, 24, 25 abaixo mostram resultados de alguns pontos mínimos encontrados na busca de otimização pelo método direto, com os seus respectivos carregamentos para  $bw=20$ .

Tabela 22: Mínimos custos com seus respectivos dimensionamentos  $q=10$  kN/m

h (cm)	Bitola (mm)	N barra	As+ (cm <sup>2</sup> )	Bitola (mm)	N barra	As- (cm <sup>2</sup> )	CA	fck	Menor Custo
23	10	3	2,312	10	7	5,274	60	30	R\$ 369,20
23	6,3	9	2,787	10	9	6,347	50	30	R\$ 372,30
24	10	3	2,190	12,5	4	4,890	60	30	R\$ 372,50
24	6,3	9	2,625	16	3	5,865	50	30	R\$ 372,70
25	8	5	2,476	10	7	5,457	50	30	R\$ 374,40
25	6,3	7	2,100	12,5	4	4,757	60	25	R\$ 375,80
25	6,3	7	2,064	10	6	4,543	60	30	R\$ 377,00
26	8	4	1,991	8	9	4,418	60	25	R\$ 379,00
25	6,3	9	2,521	16	3	5,728	50	25	R\$ 379,10
26	12,5	2	2,386	10	7	5,304	50	25	R\$ 380,30

Tabela 23: Mínimos custos com seus respectivos dimensionamentos  $q=20$  kN/m

h (cm)	Bitola (mm)	N barra	As+ (cm <sup>2</sup> )	Bitola (mm)	N barra	As- (cm <sup>2</sup> )	CA	fck	Menor Custo
31	10	5	3,922	20	3	8,911	50	30	R\$ 481,70
32	10	4	3,128	10	9	7,028	60	30	R\$ 482,10
31	8	7	3,266	22	2	7,400	60	30	R\$ 482,70
32	10	5	3,750	12,5	7	8,421	50	30	R\$ 484,70
33	12,5	3	3,610	16	4	7,965	50	30	R\$ 486,40
34	8	7	3,460	22	2	7,600	50	30	R\$ 489,10
33	8	6	3,000	10	9	6,641	60	30	R\$ 489,30
34	12,5	3	3,520	16	4	7,920	50	25	R\$ 491,70
35	8	7	3,387	22	2	7,567	50	25	R\$ 494,30
34	8	6	2,930	10	9	6,600	60	25	R\$ 494,60
35	6,3	9	2,777	20	2	6,038	60	30	R\$ 496,00

Tabela 24: Mínimos custos com seus respectivos dimensionamentos  $q=40$  kN/m

h (cm)	Bitola (mm)	N barra	As+ (cm <sup>2</sup> )	Bitola (mm)	N barra	As- (cm <sup>2</sup> )	CA	fck	Menor Custo
43	10	7	5,415	20	4	12,154	50	30	R\$ 641,40
44	8	9	4,380	25	2	9,780	60	30	R\$ 642,80
42	10	6	4,642	22	3	10,547	60	30	R\$ 643,40
44	10	7	5,250	16	6	11,730	50	30	R\$ 647,00
45	8	9	4,244	20	3	9,395	60	30	R\$ 648,70
43	8	9	4,507	22	3	10,123	60	30	R\$ 649,60
45	10	7	5,107	22	3	11,268	50	30	R\$ 650,40
42	16	3	5,573	16	7	12,694	50	30	R\$ 652,80
46	8	10	4,957	22	3	10,914	50	30	R\$ 653,40
46	8	9	4,200	25	2	9,514	60	25	R\$ 656,10
47	8	10	4,911	22	3	11,023	50	25	R\$ 657,20
46	8	9	4,128	20	3	9,085	60	30	R\$ 658,10

Tabela 25: Mínimos custos com seus respectivos dimensionamentos  $q=80$  kN/m

h (cm)	Bitola (mm)	N barra	As+ (cm <sup>2</sup> )	Bitola (mm)	N barra	As- (cm <sup>2</sup> )	CA	fck	Menor Custo
58	10	10	7,844	16	9	17,822	50	30	R\$ 859,90
60	20	2	6,257	16	7	14,057	60	30	R\$ 866,70
58	10	9	6,533	22	4	14,800	60	30	R\$ 869,00
59	10	10	7,680	16	9	17,280	50	30	R\$ 869,30
59	10	9	6,393	25	3	14,400	60	30	R\$ 873,30
61	20	2	6,147	16	7	13,642	60	30	R\$ 876,10
63	10	9	7,057	20	5	15,540	50	30	R\$ 876,50
60	22	2	7,500	16	9	16,843	50	30	R\$ 877,50
62	22	2	7,221	32	2	15,931	50	30	R\$ 877,90
64	10	9	7,040	32	2	15,880	50	25	R\$ 880,30
62	16	3	6,00	16	7	13,283	60	30	R\$ 880,90
64	10	9	6,940	22	4	15,200	50	30	R\$ 881,50
63	16	3	5,980	16	7	13,586	60	25	R\$ 882,80

Uma observação interessante de todos os resultados apresentados anteriormente é que o número de barras igual 8 (oito) não foi selecionado. Deve-se ressaltar que na formação do custo foi feita uma pré-seleção do melhor arranjo (bitola x N° barras) com o menor custo. Coincidentemente o produto entre o peso linear e o número de barras para uma determinada área de aço aparece igual em uma ou mais situações. Desta forma, para fins práticos, como o programa seleciona a situação de menor número de barras o caso quando o número de barras é igual a 8 (oito) nunca aparece para os carregamentos apresentados.

## 4.2 – ALGORITMOS GENÉTICOS

Apresenta-se a seguir os resultados da avaliação de custo de uma viga bi-apoiada avaliada pelo programa montado seguindo a formulação do algoritmo genético clássico.

A função objetivo (Custo) foi definida e apresentada anteriormente. Adotou-se a altura  $h$  como variável para geração de indivíduos. Os demais parâmetros foram mantidos constantes e a área de aço foi calculada a partir da altura  $h$  gerada aleatoriamente.

A primeira restrição do problema foi procurar ou identificar uma altura  $h$  que satisfizesse as condições de flecha máxima e momento último de compressão.

O resultado apresentado a seguir não mostra uma convergência da solução. Alguns problemas podem ter contribuído para isso. Dentre eles citam-se: nova geração de indivíduos a partir do cruzamento e o processo de mutação, não compatíveis com as restrições de norma; a função objetivo pode não ter sido a melhor, além de possíveis problemas na programação.

Por isso escolheu-se um único caso para apresentar os resultados.

Os dados do problema foram:

$q = 80 \text{ kN/m}$

$f_{ck} = 30 \text{ MPa}$

tipo aço = CA50

número de indivíduos = 200

$h = 0,2 \text{ m} \leq h \leq 1 \text{ m}$

probabilidade de cruzamento = 25%

probabilidade de mutação = 1%

número de gerações = 300

As Figuras 45,46 a seguir mostram os resultados obtidos da programação do algoritmo genético.

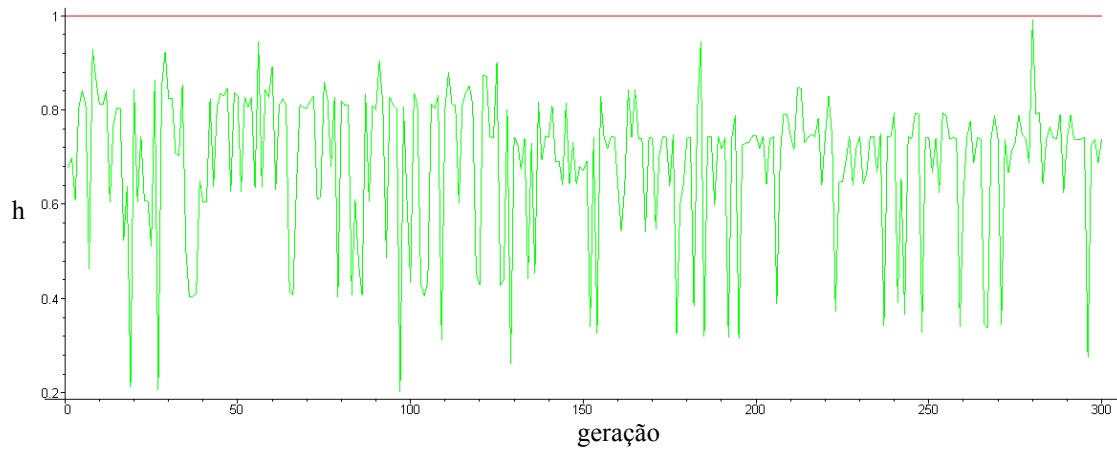


Figura 45: Variação do h versus a geração

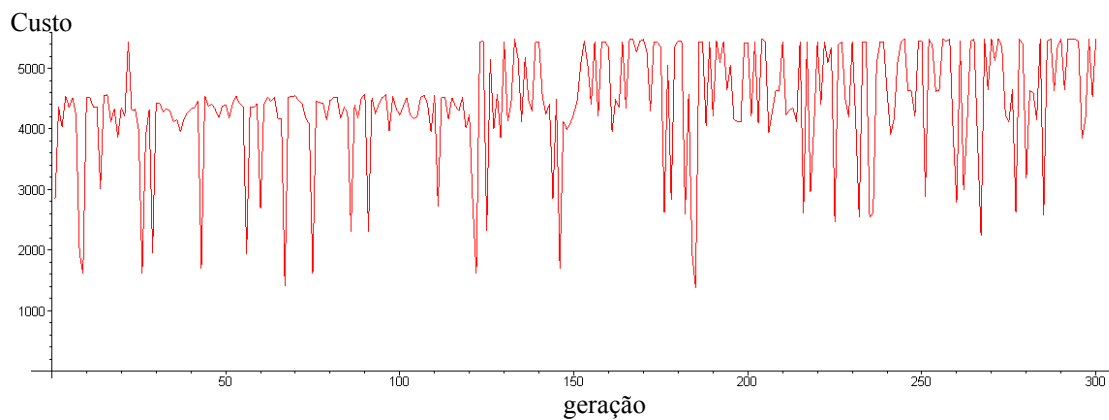


Figura 46: Variação do custo versus a geração

Observa-se que não há convergência dos resultados ao longo das gerações. O menor custo identificado na Figura 46 foi de 1.390,50 reais, na geração 184.

## 5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O dimensionamento de uma viga de concreto abrange outras considerações que não foram tratadas aqui, como: fissuração, verificação ao cisalhamento, fluência ou torção.

O trabalho desenvolvido considerou somente o dimensionamento de vigas submetidas a flexão.

Também levou-se em conta apenas carregamentos uniformemente distribuídos, que é o mais usual.

### 5.1 – CONCLUSÕES

Dos principais resultados obtidos, identificou-se que:

- Quanto maior a altura  $h$  menor será a área de aço  $A_s$  conseqüentemente têm-se maior volume de concreto, implicando num maior custo da viga, e vice-versa.
- O fator predominante no custo da viga é a altura ou volume de concreto.
- Contrariando um pouco os resultados, há uma pequena redução no custo com uma altura da viga ligeiramente maior. Isto se deve a uma pequena redução de  $A_s$  (área de aço), levando com que o número e a bitola das barras sejam diferentes. Assim escolhendo um maior número de barras com uma bitola menor e fazendo-se os devidos cortes das barras obtém-se um custo da viga um pouco menor do que a altura do passo anterior.
- Conforme esperado, a altura da viga aumenta com o carregamento, conseqüentemente o seu custo também.
- Observa-se ainda que há diversos arranjos que se pode escolher com um custo baixo para uma determinada viga e um determinado carregamento, que atendem princípios básicos de segurança, com respeito aos estados limites de ruptura e de utilização e a imposições de normas técnicas.



- O fck mais utilizado que gera os menores custos foi o fck30, mesmo ele sendo o mais caro. Isto se deve ao menor volume de concreto, pois há uma maior resistência da peça.
- Os menores custos obtidos com largura das vigas igual a 20cm são em torno de 5% maiores comparados com a largura de 15cm, por possuírem maior volume de concreto.
- O arranjo com o número de barras igual a 8 não gerou nenhuma situação de menor custo
- Na viga apoiada engastada e na bi-engastada percebe-se que a área de aço positiva em função da área de aço negativa possui aproximadamente a mesma proporção.
- A eficiência das vigas apoiada engastada e bi-engastada é menor que a da viga bi-apoiada. Isto se deve ao fato de ocorrer uma redistribuição dos momentos, os quais os momentos reduzem mais do que as seções das vigas, conseqüentemente o esforço resistente.
- Em função dos resultados obtidos do AG percebe-se que pode haver problemas na função objetivo ou na própria programação. A identificação mais precisa do problema requer mais investigação.

## 5.1 – SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

- Aprimorar ou corrigir a sub-rotina de algoritmos genéticos já que os resultados não apresentaram convergência.
- Dimensionamento ao cisalhamento já que os estribos vão certamente interferir os custos da viga.
- Investigar melhor a influência da largura da viga, pois esta influencia nos parâmetros da viga ( $A_s$ ,  $h$ , custo).

## 6. REFERÊNCIAS

- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **Ações e segurança nas estruturas – Procedimento. NBR 8681.** Rio de Janeiro, 2003.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **Cargas para cálculos de estruturas. NBR 6120.** Rio de Janeiro, 1980.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **Execução de estruturas de concreto – Procedimento. NBR 14931.** Rio de Janeiro, 2003.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **Projeto de estruturas de concreto – Procedimento. NBR 6118.** Rio de Janeiro, 2003.
- BOTELHO, Manoel Henrique Campos; MARCHETTI, Osvaldemar. **Concreto Armado em te Amo.** Vol 1; 4 ed. São Paulo: Ed. Edgard Blücher, 2006.
- CASTRO, Rodrigo Evangelista de. **Otimização de Estruturas com Multi-Objetivos Via Algoritmos Genéticos.** 2001. Tese de Doutorado. COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro.
- CHAVES, Isabella Andreczevski. **Otimização de Pilares de Concreto Armado Mediante Uniformização do Índice de Confiabilidade.** 2004. Dissertação de Mestrado. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- HIBBELER, R. C.. **Resistência dos Materiais.** 5 ed. São Paulo: Ed. Pearson Education, 2004.
- KIMURA, Alio. **Informática Aplicada em Estruturas de Concreto Armado: Cálculo de edifícios com o uso de sistemas computacionais.** São Paulo: Ed. Pini, 2007.
- LEONHARDT, F.; MÖNNING, E.. **Construções de Concreto: Princípios básicos do dimensionamento de estruturas de concreto armado.** Vol. 1, Rio de Janeiro: Ed. Interciência, 1977.
- NINA, Thais Coimbra. **Otimização de Seções Transversais em Concreto Armado: Aplicação a Pórticos Planos.** 2006. Dissertação de Mestrado. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- SARAMAGO, Sezimária F. Pereira. **Métodos de Otimização Randômica: Algoritmos Genéticos e Simulated Annealing.** 2003. Minicurso do XXVI CNMAC, Universidade Federal de Uberlândia - MG.
- SILVA, Elivaldo Elenildo da. **Otimização de Estruturas de Concreto Armado Utilizando Algoritmos Genéticos.** 2001. Dissertação de Mestrado. Universidade de São Paulo, Escola Politécnica.