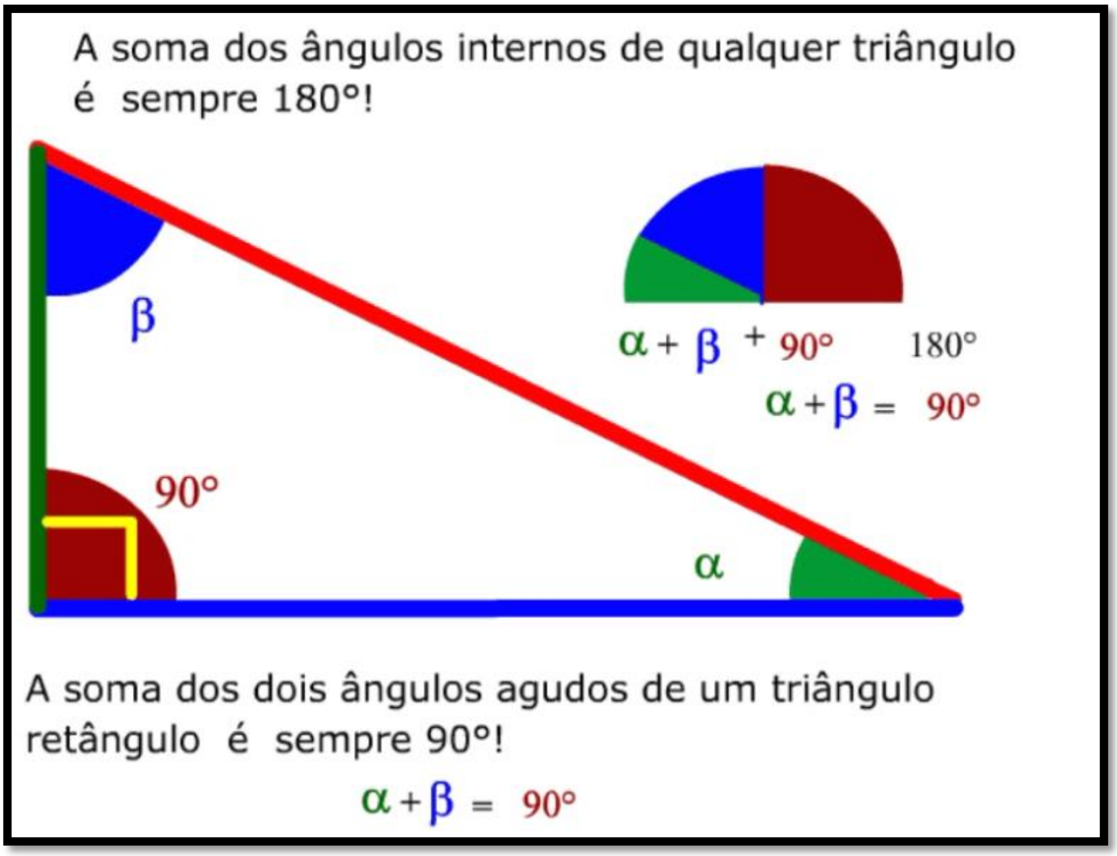
Unidade 3

Objetivo: Desenvolver conceitos de matemática necessários ao entendimento e domínio das ciências fundamentais, aplicado às Engenharias, desenvolvendo habilidades e destreza na resolução de problemas que envolvem conceitos de razões trigonométricas no triângulo retângulo e na circunferência trigonométrica.

3.1. Relações trigonométricas no triângulo retângulo

Razões trigonométricas são as razões entre dois lados de um triângulo retângulo, relacionado com um dos ângulos agudos internos.

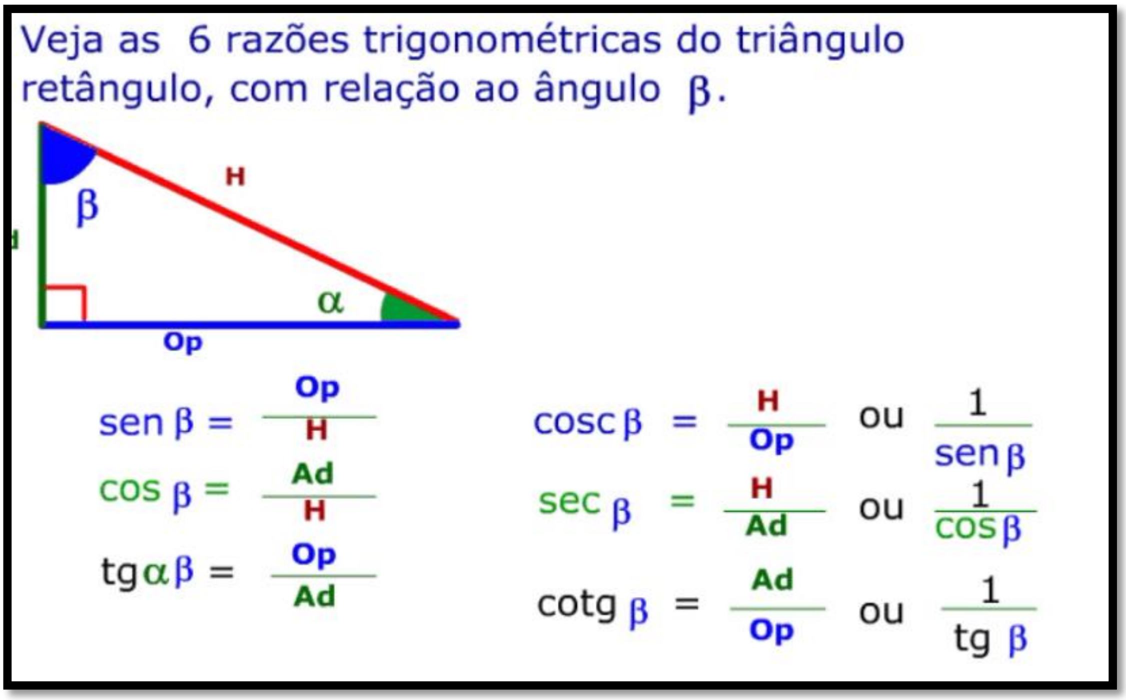
Considerado que num triângulo retângulo um dos ângulos tem 90º, e que a soma dos ângulos internos, em qualquer que seja o triângulo, é 180º, conclui-se que a soma dos dois ângulos agudos é 90º.



O número de lados de um triângulo é 3 e o número de razões 2 a 2, com 3 elementos é um arranjo de 3 elementos, tomados 2 a 2 é igual a A(3,2)=3!/(3-2)! = 6. Portanto o número de razões trigonométricas num triângulo retângulo é seis. A cada uma das seis razões é atribuído um nome que está relacionado a apenas um dos ângulos agudos.

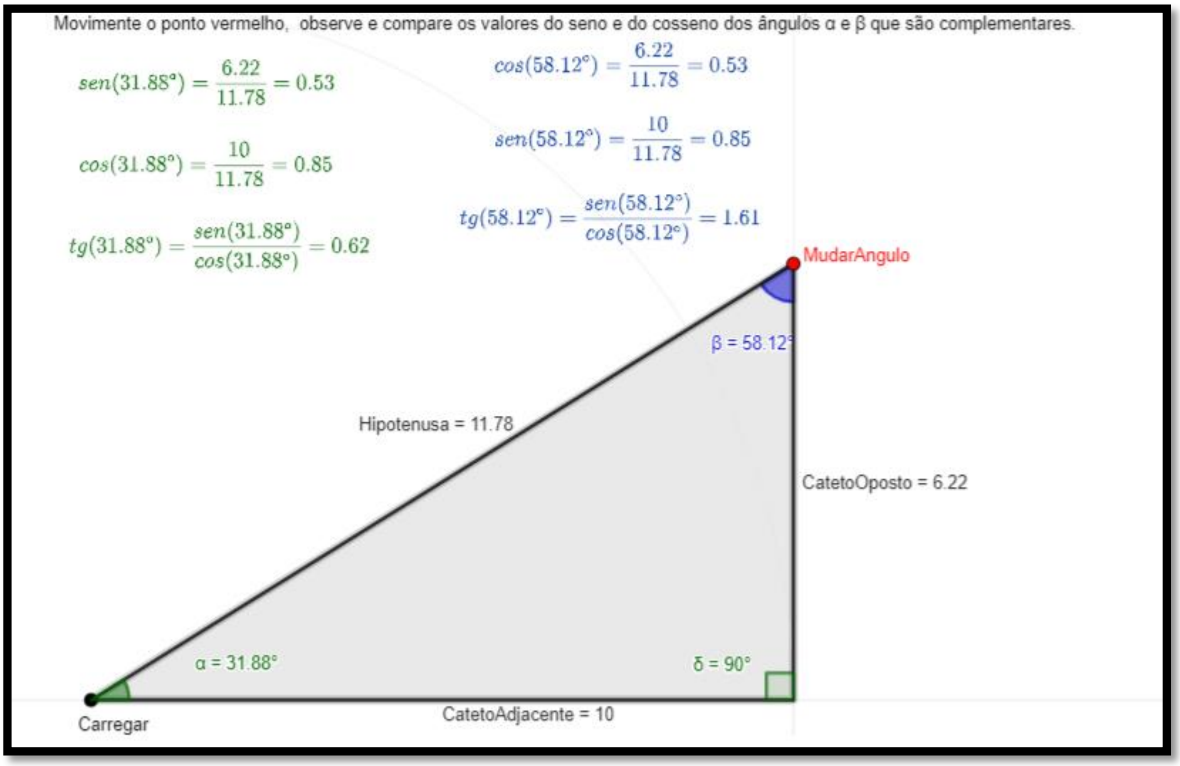
O fato dos dois ângulos agudos, que vamos chamar de ɑ e β serem complementares a 90º, faz com que os seis valores das razões relacionadas ao ângulo ɑ se repitam ao se obter as seis razões relacionadas ao ângulo β da seguinte forma quando (ɑ + β=90º)

Veja a animação a seguir, e compare as razões que estão na mesma linha.

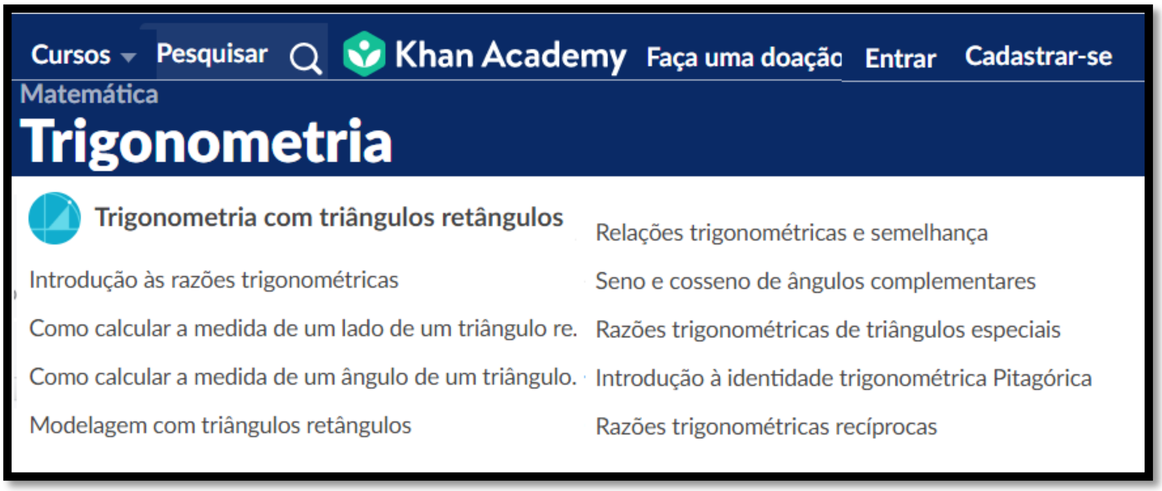


Acesse o objeto de aprendizagem com um clique sobre a própria figura. Na página que irá abrir, movimente o ponto identificado como “MudarAngulo”.

https://www.geogebra.org/m/pnayqgua



Para praticar mais efetue as atividades do endereço a seguir.

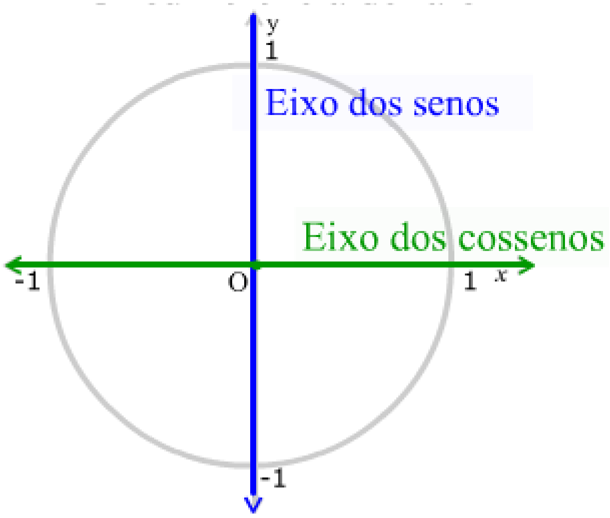


Fonte> https://pt.khanacademy.org/math/trigonometry <Acesso em 16/06/2020>

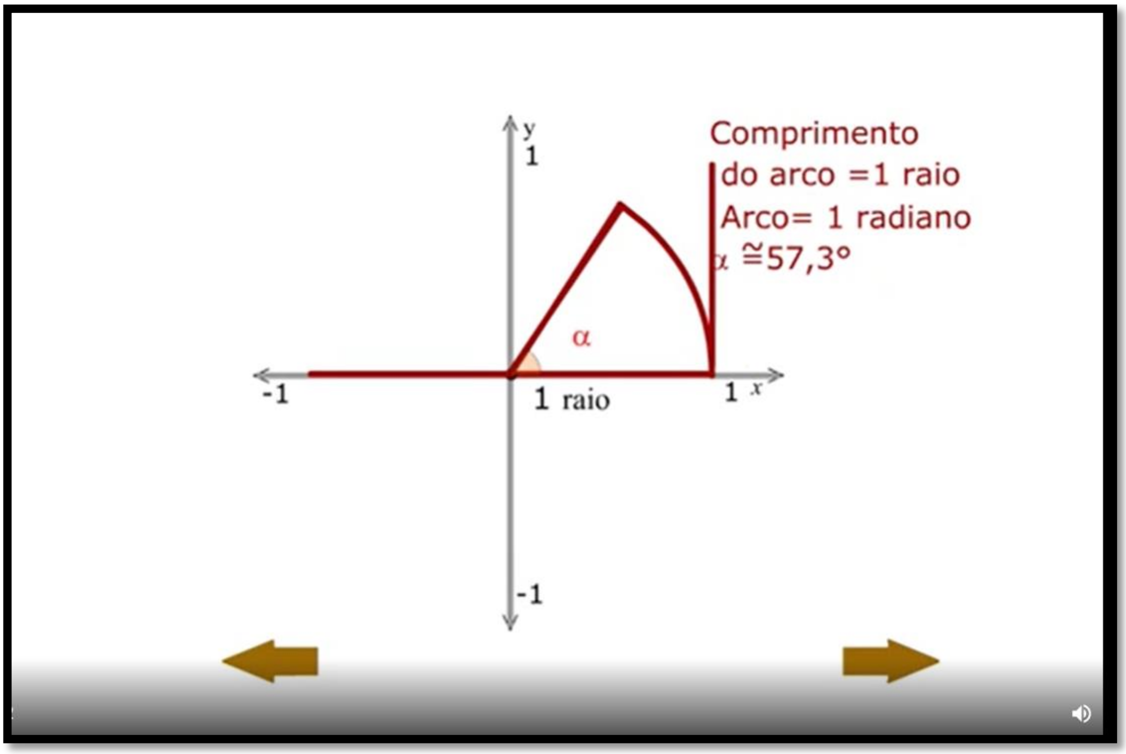
3.2. Circunferência trigonométrica

Círculo trigonométrico ou ciclo trigonométrico

A circunferência trigonométrica é uma circunferência de raio unitário, onde seu centro é a origem de um plano cartesiano em que, o eixo vertical ou das ordenadas(y) é chamado de eixo dos senos e o eixo horizontal ou das abscissas(x) é chamado de eixo dos cossenos(x).



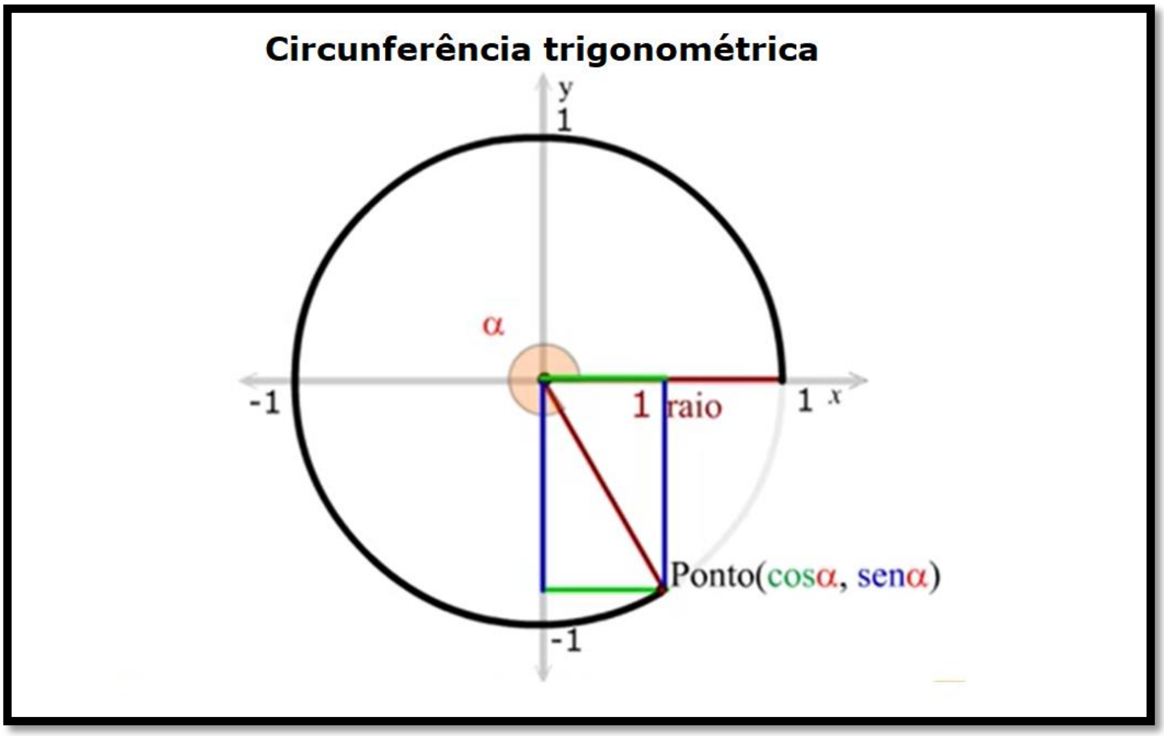
Entre as unidade de medida dos ângulos destacam-se os graus e radianos. Assista o vídeo a seguir para rever o radiano.



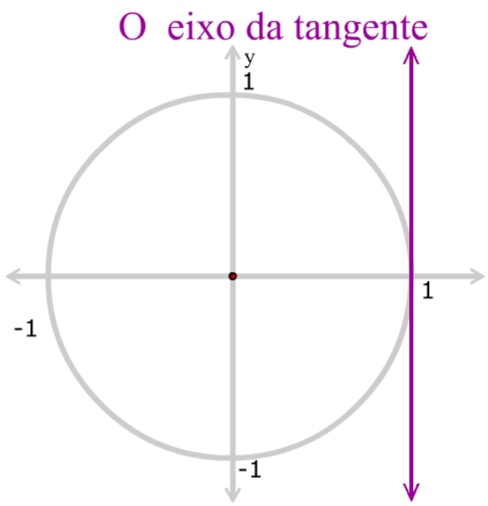
Endereço do vídeo:

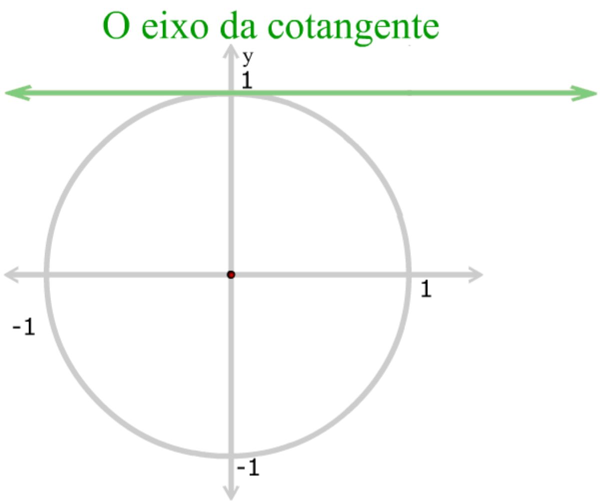
http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/pre-calculo/pagina/reserva/define_radiano.mp4

Assista o vídeo a seguir para rever as relações trigonométricas dos pontos da circunferência unitário.

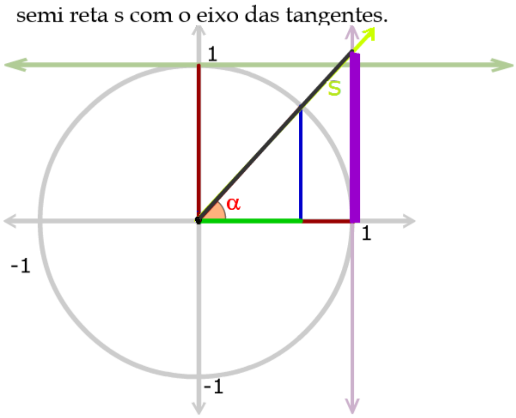


Além dos eixos do seno e cosseno, no ciclo trigonométrico também tem os eixos da tangente e cotangente.

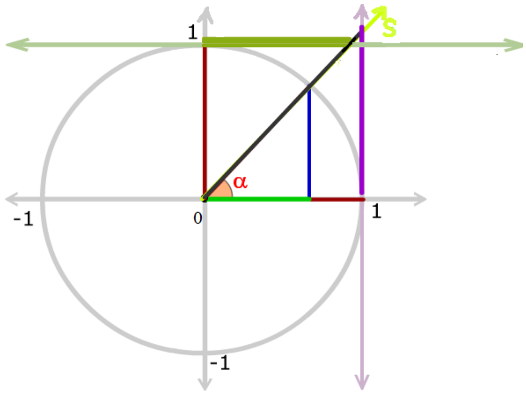




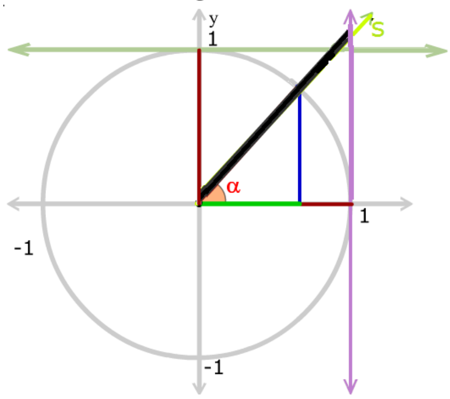
Tangente de α. É a medida do segmento que vai do ponto (1, 0) até o ponto de intersecção da semi reta s com o eixo das tangentes.



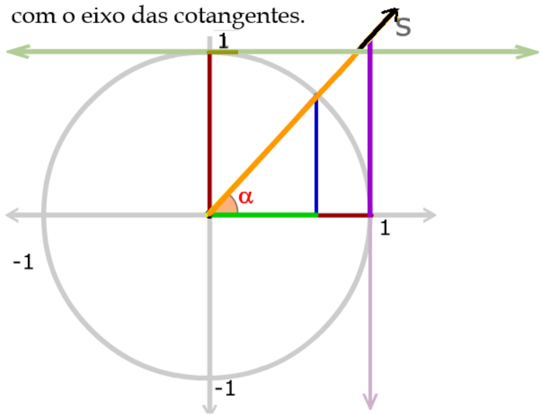
Cotangente de α. É a medida do segmento que vai do ponto (0, 1) até o ponto de intersecção da semi reta s com o eixo das cotangentes.



Secante de α. É a medida do segmento que vai da origem até o ponto de intersecção da semi reta s com o eixo das tangentes

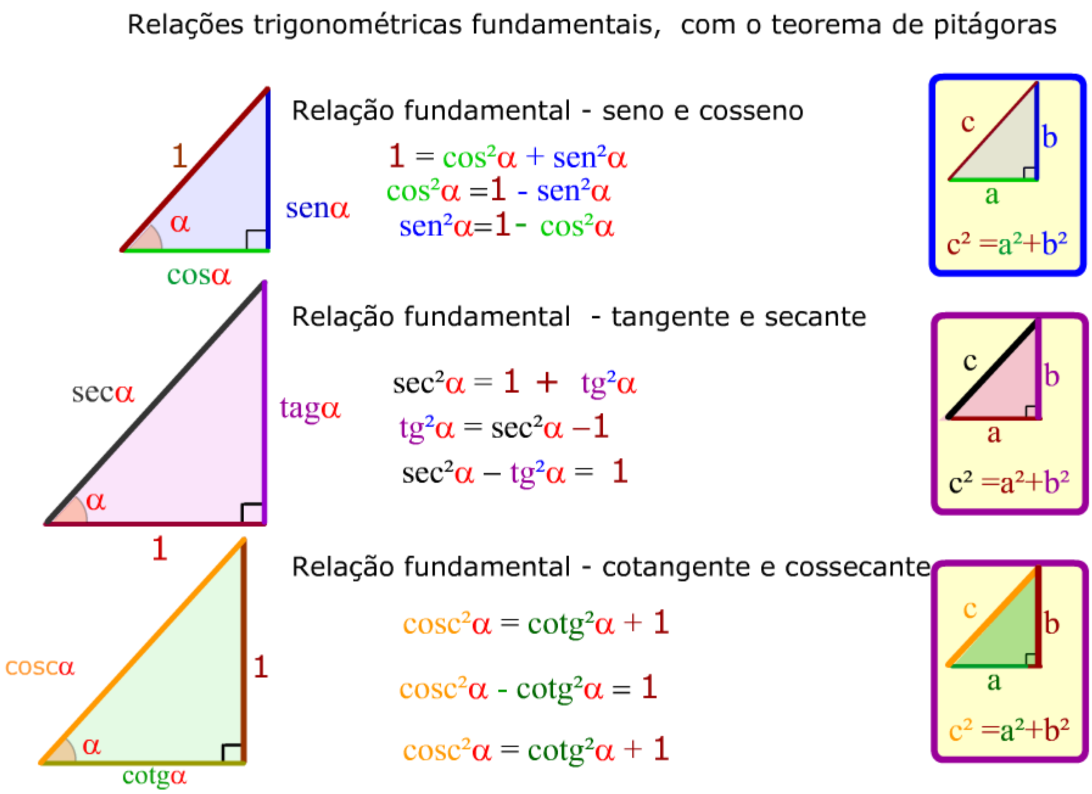


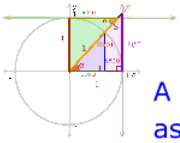
Cossecante de α. É a medida do segmento que vai da origem até o ponto de intersecção da semi reta s com o eixo das cotangentes.



3.3 Relações trigonométricas fundamentais e derivadas

Fonte: http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/pre-calculo/pagina/reserva/relacoes-trigonometricas%20no%20circulo.mp4

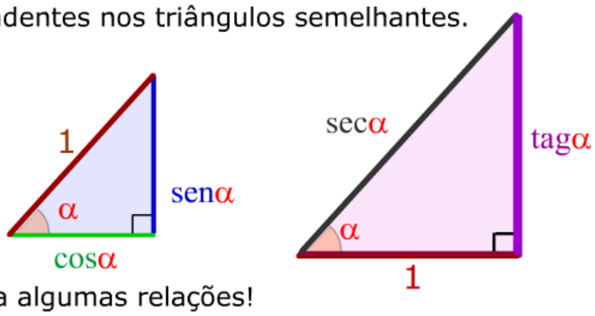




Relações trigonométricas pela semelhança de triângulos

A relação de semelhança entre dois triâgulos existe quando possuem as mesmas medidas de ângulos. Assim, um é uma apliação, uma redução ou é igual do outro, considerando as dimenções.

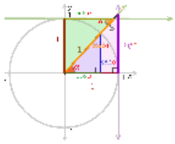
As razões entre as medidas dos lados de um triângulo se mantem entre os lados correspondentes nos triângulos semelhantes.



Veja algumas relações!

$$\frac{sen\alpha}{cos\alpha} = \frac{tag\alpha}{1} \Rightarrow tag\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha}$$

$$\frac{cos\alpha}{1} = \frac{1}{sec\alpha} \Rightarrow cos\alpha = \frac{1}{sec\alpha} \Rightarrow sec\alpha = \frac{1}{cos\alpha}$$



Relações trigonométricas pela semelhança de triângulos

Veja algumas relações trigonométricas entre os triângulo acima !

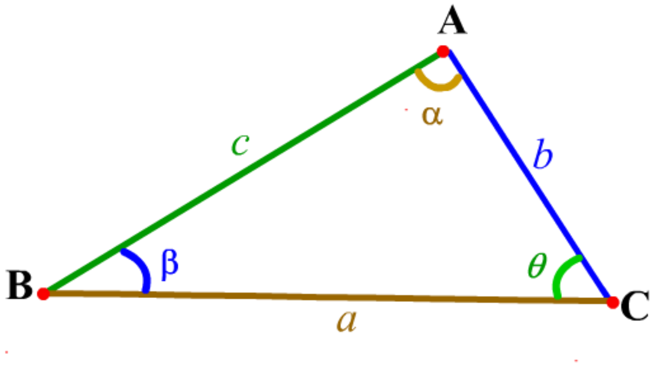
$$\frac{cos\alpha}{sen\alpha} = \frac{cotg\alpha}{1} \Rightarrow cotg\alpha = \frac{cos\alpha}{sen\alpha}$$

$$\frac{sen\alpha}{1} = \frac{1}{cosc\alpha} \qquad sen\alpha = \frac{1}{cosc\alpha} \Rightarrow cosc\alpha = \frac{1}{sen\alpha}$$

3.4 Lei dos senos e cossenos

A lei dos senos e dos cossenos são utilizadas para a resolução de problemas práticos que podem sintetizados e representados por um triângulos quaisquer, seja ou não um triângulo retângulo.

Para qualquer triângulo as relações da lei dos cossenos e a lei dos senos é válida.



Lei dos cossenos

$$a^2 = b^2 + c^2 - bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - ab\cos\theta$$

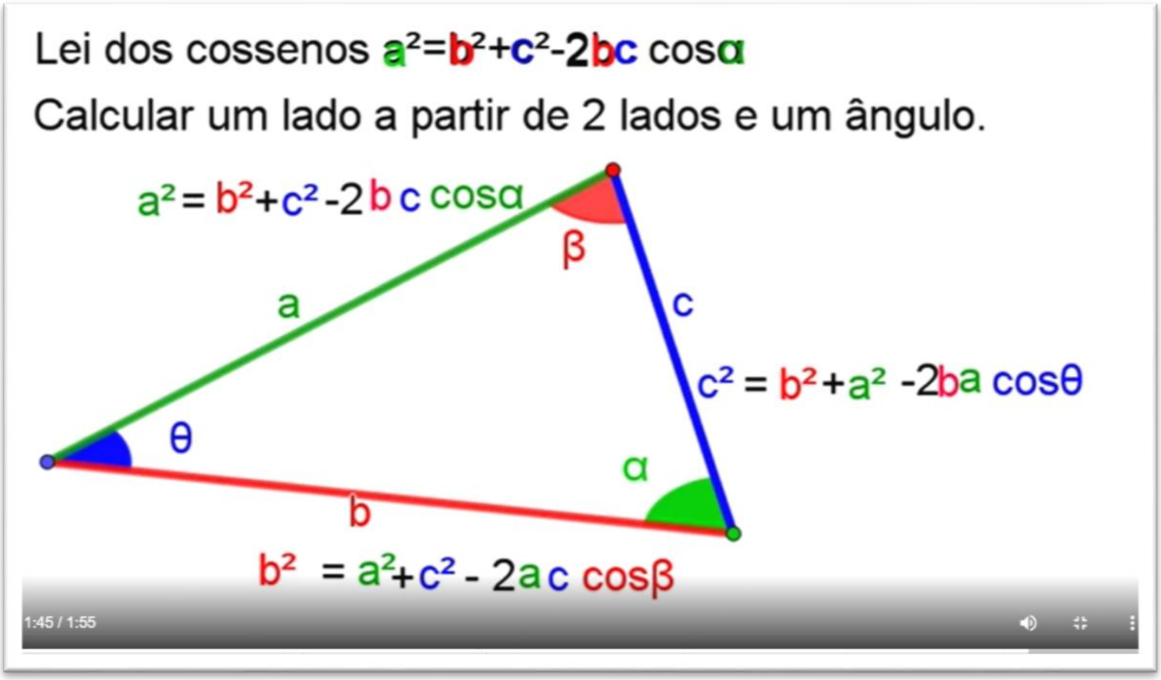
Lei dos senos

$$\frac{a}{sen\,\alpha} = \frac{b}{sen\,\beta} = \frac{c}{sen\,\theta}$$

Lei dos cossenos

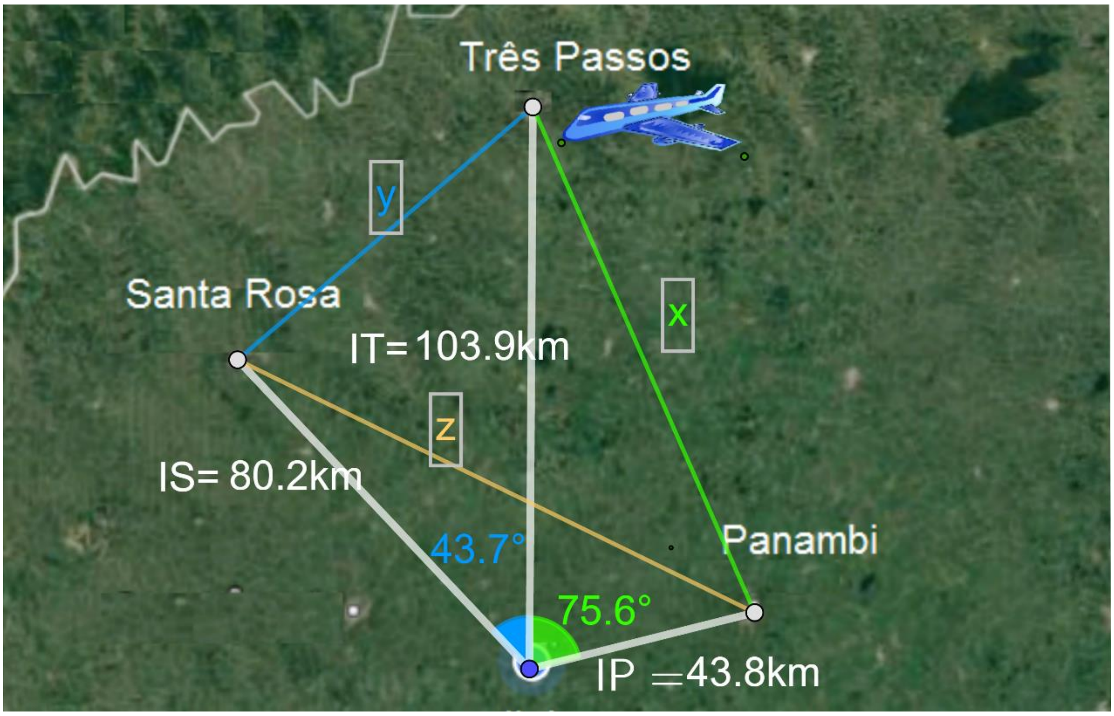
A Lei dos cossenos é utilizada para encontrar medidas desconhecidas a partir de outras que podem ser obtidas através de medições. As medicas procuradas podem ser representar alturas, larguras, comprimentos, profundidades, desníveis entre outros. Porém, antes de poder utilizar esta teoria, engenheiro precisa verificar se a situação problema pode ser representado por um esquema representado por um triângulo e que, dois lados deste possam ser medidos com as ferramentas disponíveis, bem como o ângulo entre estes lados ou entre as direções representados pelos lados.

Veja o vídeo a seguir para entender melhor que medidas precisam ser obtidas. No vídeo são mostrados os três casos possíveis. No entanto, apenas um entre os casos é utilizado para encontrar o terceiro lado, visto que dois já devem estar conhecidos no momento do cálculo.



Aplicação da lei dos cossenos

Na imagem a seguir a situação problema que já está esquematizada a partir de dados de voos já realizados. Neste caso, as medidas dos lados dos triângulos representam as distâncias, em linha reta, entre a cidade de Ijuí e as cidades de Santa Rosa e Três Passos, além dos ângulos entre as direções Ijuí a: Panambi; Santa Rosa e Três Passos. Deseja-se saber as distâncias entre: Panambi e Santa Rosa e Três Passos a Santa Rosa.



Fonte: Imagem de fundo obtida no Google Maps®.

Dados para encontrar o valor de x, que representa a distância entre Panambi e Santa Rosa:

$x^2 = IP^2 + IT^2 - 2.IP.IT.\cos(\alpha)$

$x^2 = 43{,}8^2 + 103{,}9^2 - 2 \times 43{,}8 \times 103{,}9\times\cos(75{,}6°)$

$x^2 = 43{,}8^2 + 103{,}9^2 - (2 \times 43{,}8 \times 103{,}9\times 0{,}2486899)$

$x^2=10450{,}164$

$\boxed{x=(10450{,}164)^{0{,}5} \cong 102\text{km}.}$

$y^2 = IS^2 + IT^2 - 2.IS.IT.\cos(\beta)$

$y^2=80{,}2^2 + 103{,}9^2 - 2 \times 80{,}2 \times 103{,}9\times\cos(43{,}7°)$

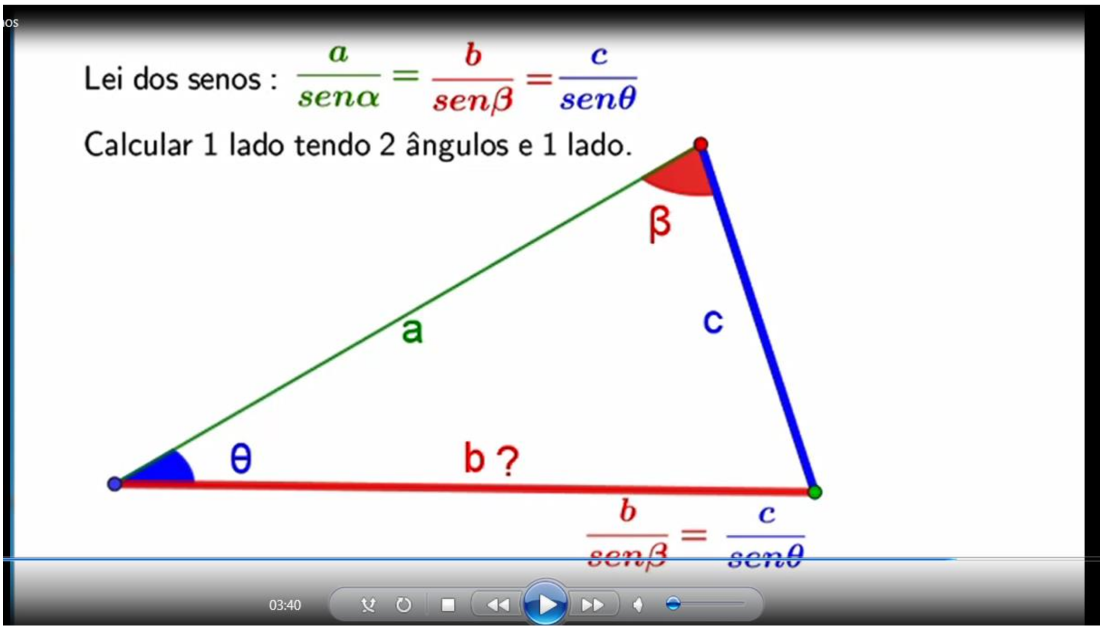
$y^2=80{,}2^2 + 103{,}9^2 - (2 \times 80{,}2 \times 103{,}9\times 0{,}72296715)$

$y^2=5178{,}597584$

$\boxed{y= (5178{,}597584)^{(1/2)} \cong 72\text{km}.}$

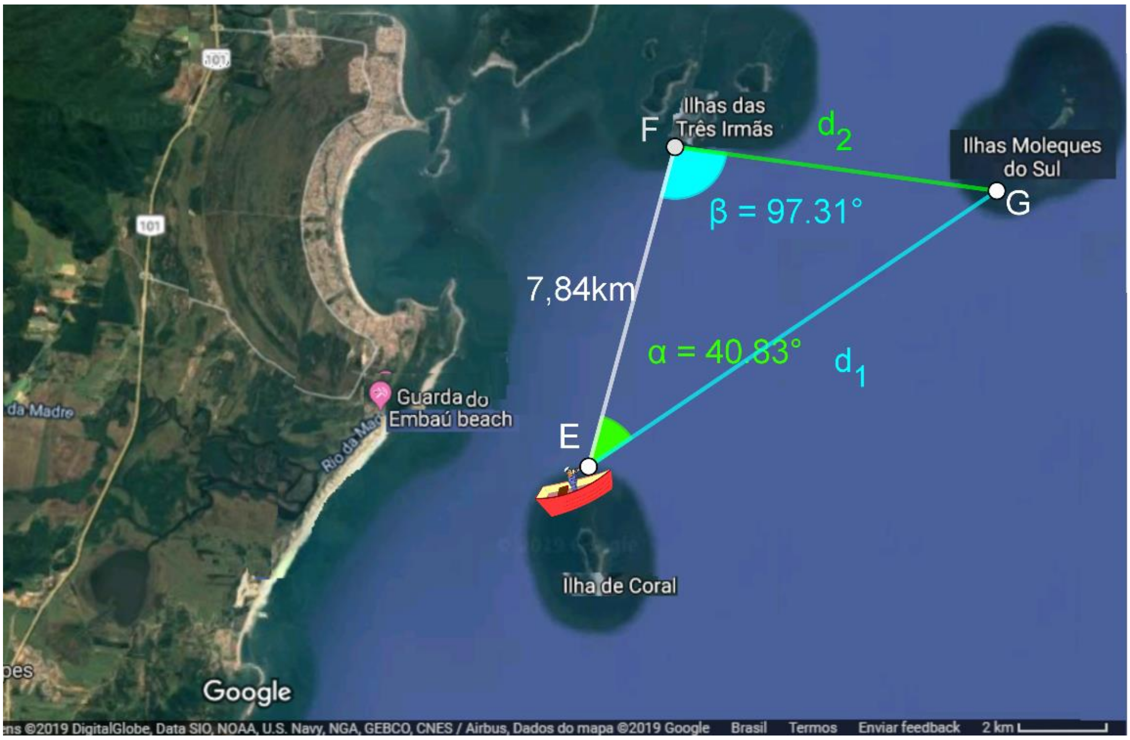
Lei dos senos

Assista o vídeo a seguir.



Aplicação da lei dos Senos.

A imagem a seguir apresenta o esquema de uma situação, onde lei dos senos pode ser utilizada. As distâncias, em linha reta, entre as ilhas Três Irmãs, Ilhas Moleques do Sul e Ilha de Coral.



$\theta + 40,83° + 97,31° = 180°$

$\theta = 180° - 40,83° - 97,31° = 41,86°$

$$\frac{7,84}{\operatorname{sen}(41,86°)} = \frac{d_1}{\operatorname{sen}(97,31°)} = \frac{d_2}{\operatorname{sen}(40,83°)}$$

Aplicando a propriedade do produto dos meios é igual ao produto dos extremos os dois primeiros termos temos:

$$\frac{7,84km}{\operatorname{sen}(41,86°)} = \frac{d_1}{\operatorname{sen}(97,31°)}$$

$d_1 . \operatorname{sen}(41,86°) = 7,84km \times \operatorname{sen}(97,31°)$

$d_1 = 7,84km \times \operatorname{sen}(97,31°) / \operatorname{sen}(41,86°)$

$d_1 = 7,84km \times 0,901872 / 0,667312765$

$d_1 \cong 10,6km.$

Aplicando a propriedade do produto dos meios é igual ao produto extremos com o primeiro e o último termo da igualdade:

$$\frac{7,84}{\operatorname{sen}(41,86°)} = \frac{d_1}{\operatorname{sen}(97,31°)} = \frac{d_2}{\operatorname{sen}(40,83°)}$$

$$\frac{7,84}{\operatorname{sen}(41,86°)} = \frac{d_2}{\operatorname{sen}(40,83°)}$$

$d2 . \operatorname{sen}(41,86°) = 7,84km \times \operatorname{sen}(40,83°)$

$d2 = 7,84km \times \operatorname{sen}(40,83°) / \operatorname{sen}(41,86°)$

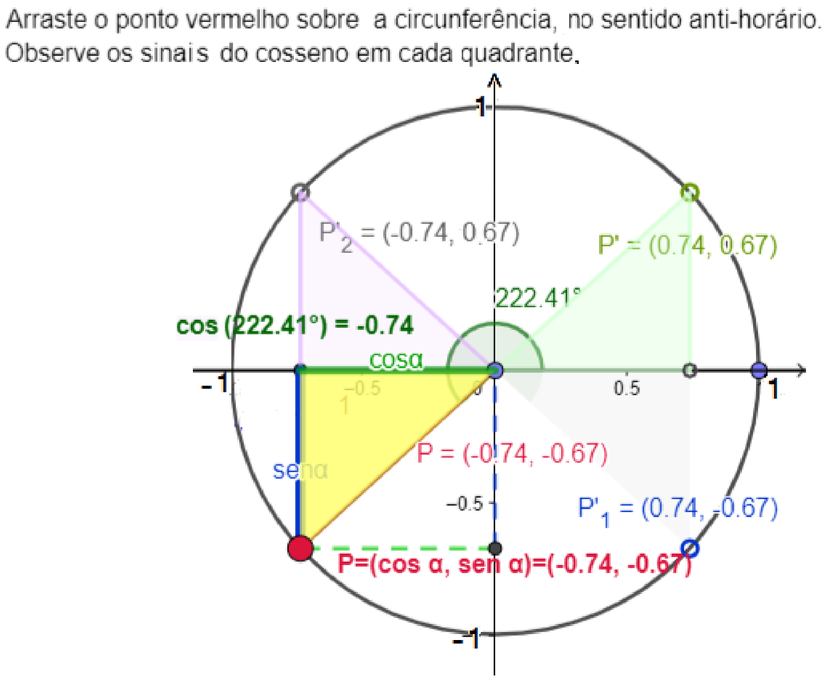
$d2 = 7,84km \times 0,653816876 / 0,667312765$

$d2 \cong 7,68km.$

Acesse os objetos de aprendizagem do endereço a seguir para explorar as relações trigonométricas no ciclo trigonométrico.

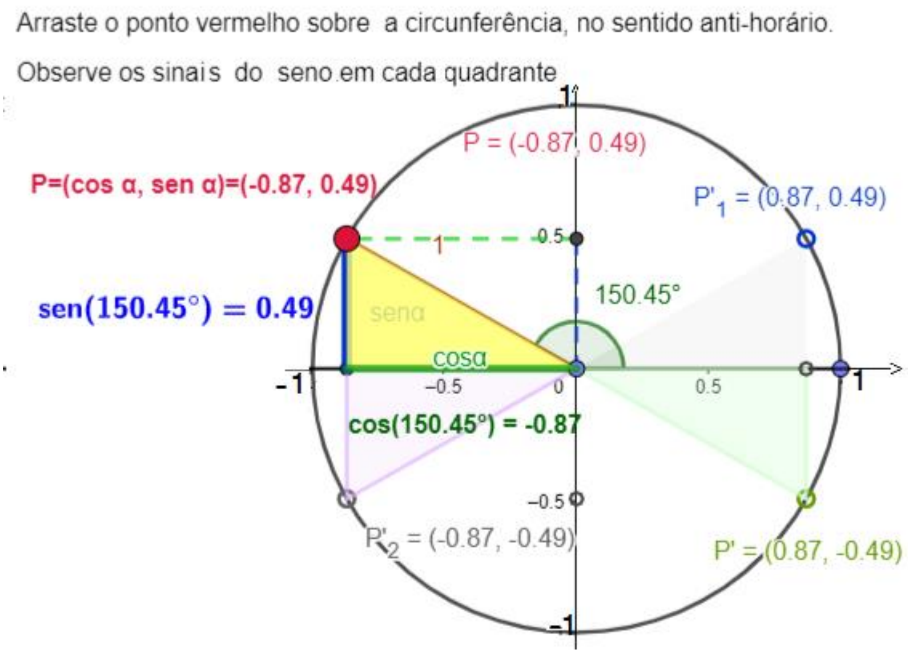
Explore seno e cosseno no Geogebra

Mova o ponto vermelho e observe o que acontece com os dados apresentados.



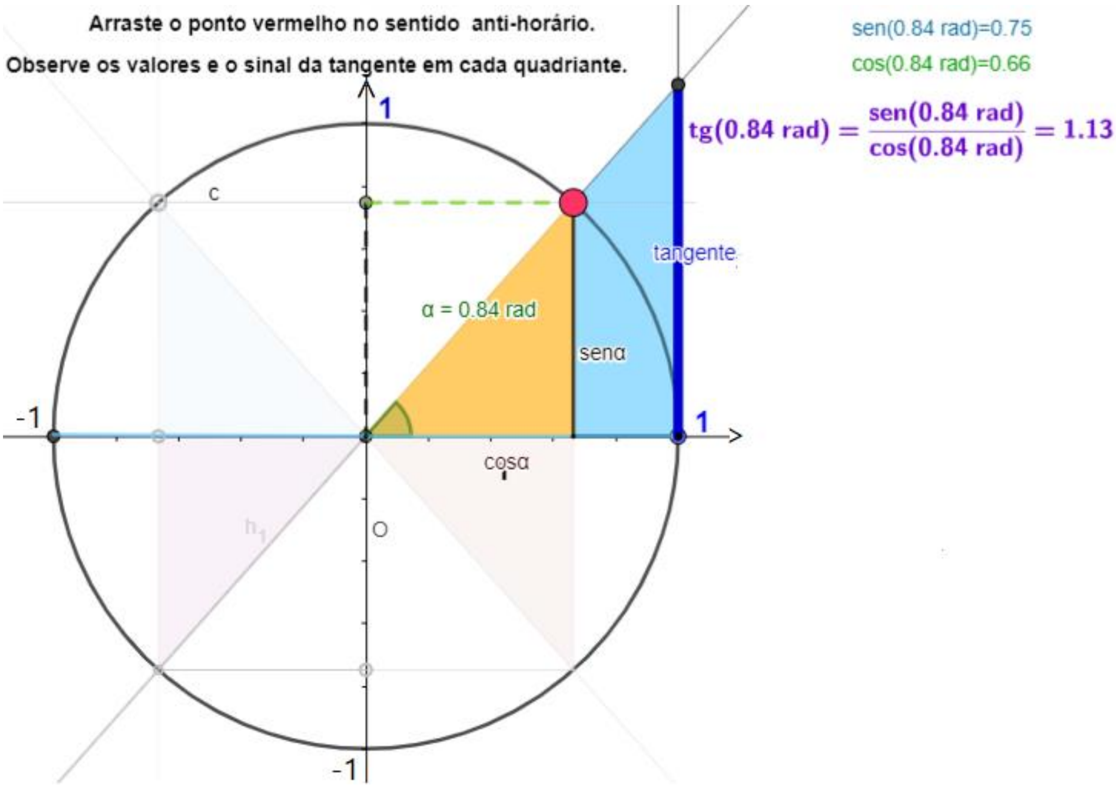
https://www.geogebra.org/m/dksuxykg

Explore o seno no Geogebra.



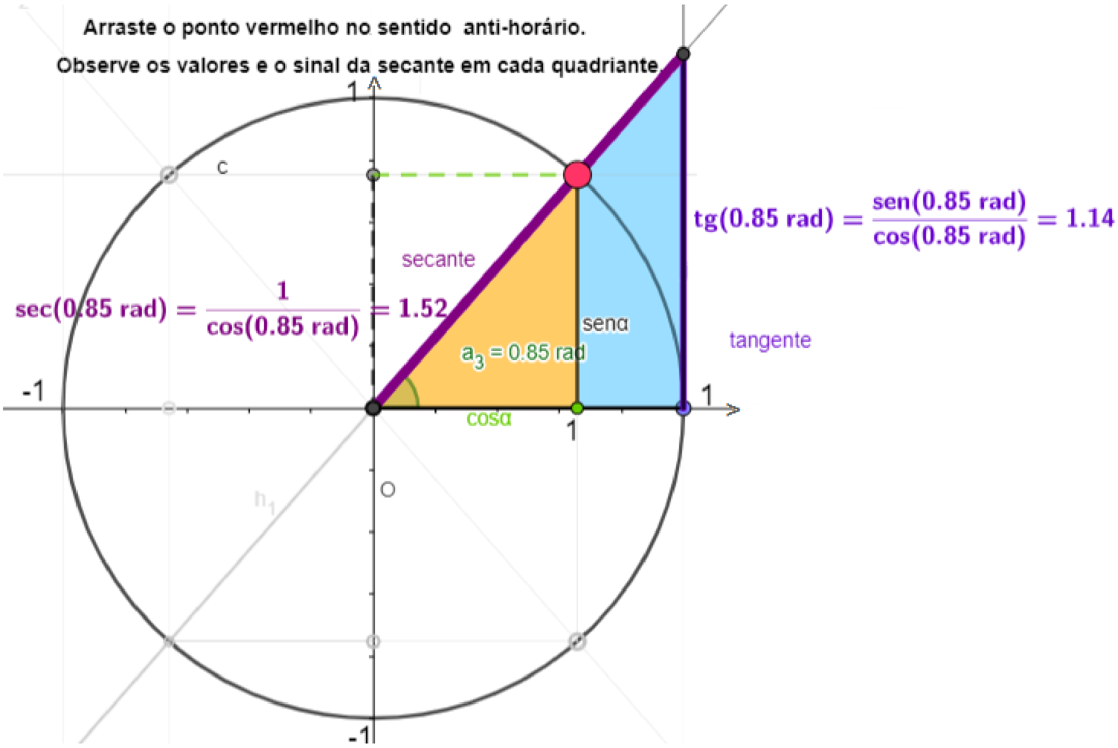
https://www.geogebra.org/m/dksuxykg

Explore a tangente no Geogebra.



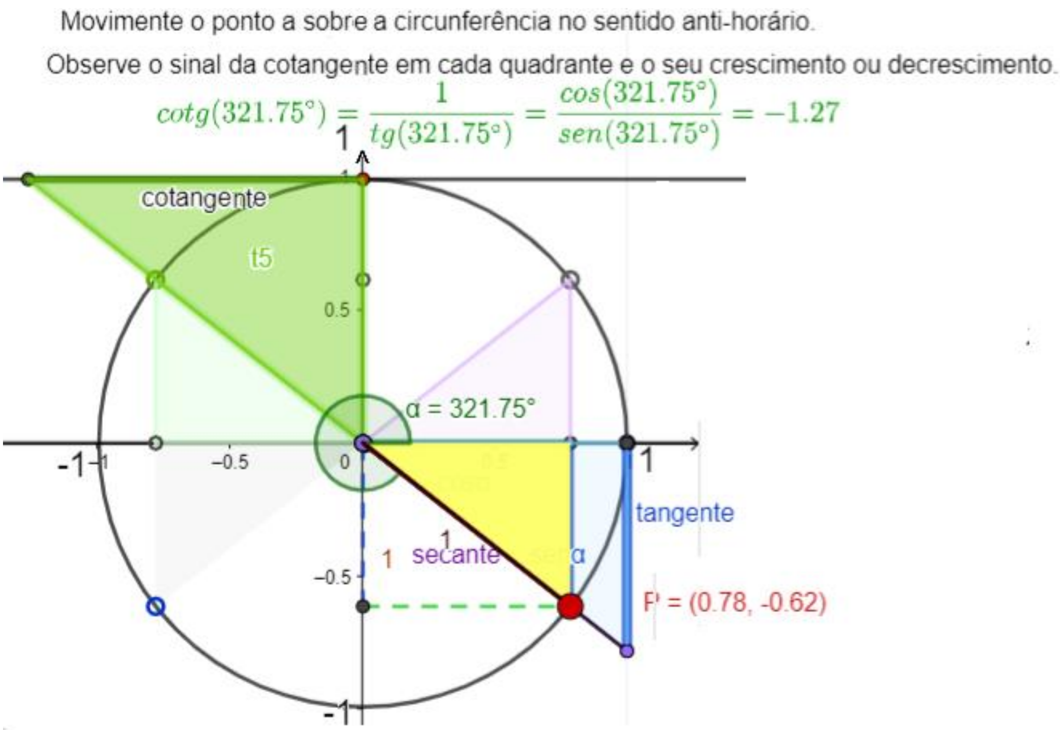
https://www.geogebra.org/m/k7zgkpkz

Explore a secante no Geogebra.



https://www.geogebra.org/m/k7zgkpkz

Explore a cotangente no Geogebra.

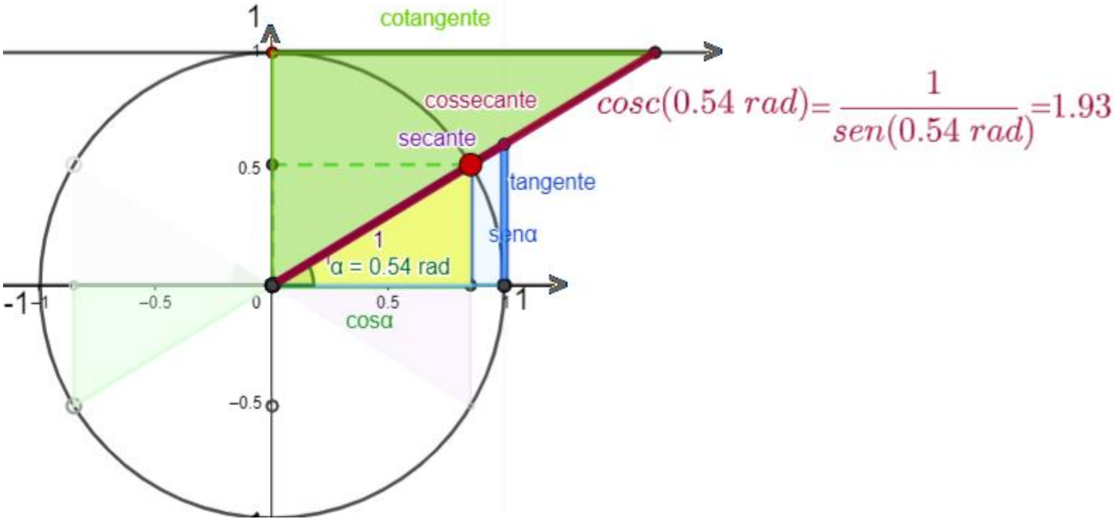


https://www.geogebra.org/m/svnzj3ux

Explore a cossecante no Geogebra.

Movimente o ponto a sobre a circunferência no sentido anti-horário.

Observe o sinal da cossecante em dada quadrante e o seu crescimento ou decrescimento.



https://www.geogebra.org/m/sty5nfxr