MODELAGEM MATEMÁTICA DO CUSTO DE UMA PIZZA DOMÉSTICA

Adriane Kis Schultz*
Solange Teresinha Knopka*

1. INTRODUÇÃO

A matemática está presente e é relevante em diversas atividades sociais e profissionais, especialmente frente às profundas transformações mundiais, principalmente do avanço tecnológico – uso dos computadores – e da contribuição destes, muitas vezes decisiva para a interpretação e intervenção em múltiplas situações do cotidiano.

Tratando-se então da matemática nos espaços escolares e educacionais, ou seja, do ensino e aprendizagem desta, ela estará contribuindo para uma cidadania informada e consciente, no momento em que visar o desenvolvimento de um pensamento mais crítico e reflexivo no estudante.

É neste sentido que entendemos que a matemática e realidade precisam estar interligadas também, e principalmente em sala de aula, pois conforme Scheffer, "O saber constrói-se contextualizado enquanto emerge da experiência vivida (...)". Eis que temos então a Modelagem Matemática como uma proposta pedagógica que busca considerar o mundo matemático inserido no mundo da vida, uma vez que fenômenos emergentes na realidade podem ser explorados no ensino, utilizando e aplicando a matemática, tornando assim a aula mais dinâmica e interessante, despertando no aluno a vontade de conhecer, explorar e redescobrir a matemática, resultando assim numa aprendizagem mais significativa.

Destaca-se ainda que a Modelagem Matemática também busca, através da investigação, a tradução de um fenômeno ou problema real para uma linguagem matemática, ou seja, um modelo matemático.

Sob estes contextos, foi desenvolvido o trabalho de modelagem sobre Pizza, pois em uma aula de Física, trabalhando sobre massa e peso, surgiu um questionamento por parte de uma aluna da Educação de Jovens e Adultos: "Por que a massa do pão quando cresce fica mais leve?"

Após a exposição do professor em uma reunião sobre o ocorrido, foi decidido conjuntamente fabricar Pizza com os alunos para observar se isto realmente ocorria, e sendo esta também um recurso a mais para em seguida, trabalharmos de forma interdisciplinar.

Partindo do tema faremos uma descrição de modelos matemáticos envolvidos no problema como o custo de fabricação, preço de venda para obtenção de lucro e variação da massa durante o tempo de descanso. Também apresentaremos a história do objeto de estudo como um recurso a mais para contextualização do assunto para assim facilitar a compreeensão e despertar o interesse no estudo dos conteúdos matemáticos envolvidos: matrizes, função exponencial e gráficos.

1.1- CONHECENDO A HISTÓRIA DA PIZZA

No início do século XVIII, Rosa e Raffael Espósito, comerciantes de Nápoles, Itália, produziam e vendiam um alimento, aperfeiçoado da popular massa de pão, recheada de torresmos, azeitona e queijo "cavalo", que abastecia as mesas das famílias pobres de Nápoles, desde o início daquele milênio, denominada Pizza.

A Fama dos Espósito correu a Itália e fez com que o Rei Umberto I realizasse uma verdadeira operação de guerra para trazer à cozinha do palácio o casal Espósito para que

* Alunas do Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática

preparassem para a Rainha Marguerita de Sabóia uma pizza, que acabara de inventar, com sabor do manjericão, sobre a massa coberta por mussarela e rodelas de tomate. O encantamento da Rainha pela pizza acabou determinando o nome de "Margherita" para aquele tipo de recheio.

*Port'Alba foi a primeirapizzaria de que se tem registro. Surgiu em Nápoles em 1830. A partir daí, se disseminou pelas regiões vizinhas e ganhou o mundo com os navios dos imigrantes italianos. No brasil, até os anos 50, as pizzarias eram uma exclusividade das colônias itaianas e seus redutos. A partir daí elas se disseminaram por todo o país até se transformarem, nos dias atuais, num dos mais saborosos pratos de nossa culinária.**

1.2 – INGREDIENTES E CUSTOS PARA A FABRICAÇÃO DA PIZZA

Ingredientes	Unid.	PU (R$)	Q p. 10	Custo 10	Custo Unitário
farinha	kg	1,16	2,7	3,132	0,3132
açúcar	kg	1,28	0,05	0,064	0,0064
sal	kg	0,45	0,1	0,045	0,0045
fermento	g	0,025	30	0,75	0,075
leite	ml	0,0006	750	0,45	0,045
azeite	ml	0,003	400	1,2	0,12
tomate	kg	1,49	1	1,49	0,149
cebola	kg	0,79	1	0,79	0,079
polpa de tomate	g	0,99	1	0,99	0,099
frango	kg	5,6	1	5,6	0,56
guisado	kg	6	1	6	0,6
mussarela	kg	9,5	1,2	11,4	1,14
mussarela ralado	kg	9,5	1	9,5	0,95
apresuntado	kg	6,5	0,8	5,2	0,52
salame italiano	kg	18	0,3	5,4	0,54
milho verde	g	0,96	1	0,96	0,096
ervilha	g	0,74	1	0,74	0,074
orégano	g	0,7	1	0,7	0,07
			Total	54,411	5,4411

Tabela I – Ingredientes e preços; quantidade e custos.

CUSTO DA PIZZA

Problema I: Qual é o custo para produzirmos 10 pizzas de tamanho médio?

Representando:

Quantidade dos ingredientes.....**q**
Preço por ingrediente.....**P**
Custo de produção.....**CI**

***** www.chicopizzas.com.br/historia.htm

O custo de cada ingrediente será dado pela multiplicação da quantidade de cada ingrediente pelo seu respectivo preço:

$\mathbf{Q_{nx1}}$	*	$\mathbf{P_{nx1}}$	=	$\mathbf{CI_{nx1}}$
q_1		P_1		CI_1
q_2		P_2		CI_2
q_3		P_3		CI_3
q_4	*	P_4	=	CI_4
...		...		...
q_n		P_n		CI_n

Podemos organizar a quantidade de ingredientes em uma tabela diagonal para podermos efetuar seu produto:

$\mathbf{Q_{d\ nxn}}$										$\mathbf{P_{nx1}}$		$\mathbf{CI_{nx1}}$
q_1										P_1		CI_1
	q_2									P_2		CI_2
		q_3								P_3		CI_3
			q_4							P_4	=	CI_4
				q_5						...		...
					...							
									q_n			

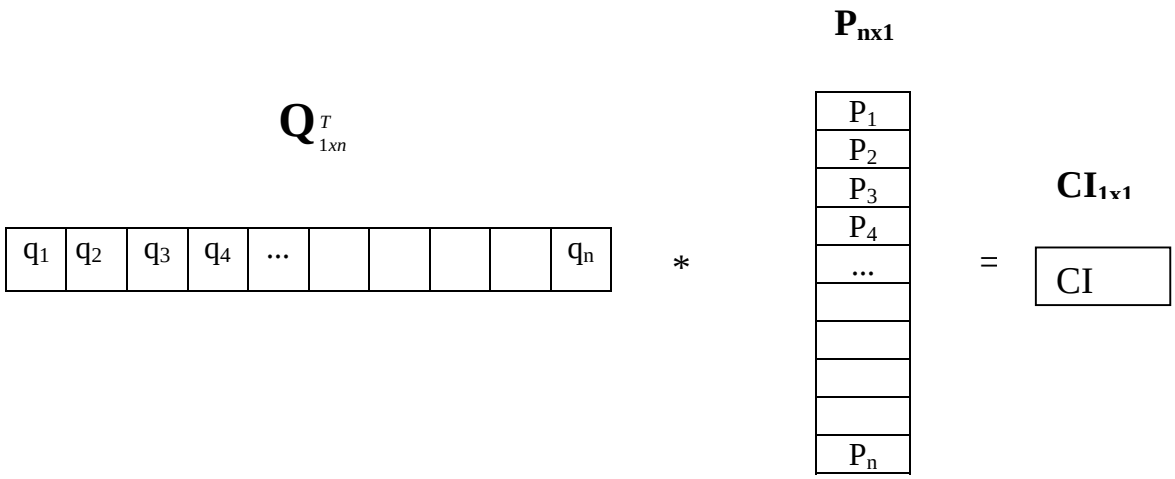
*

Representando a tabela na forma matricial, temos:

$$\begin{pmatrix} q_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0\,0 & 0 & q_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ \cdots \\ P_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} CI_1 \\ CI_2 \\ CI_3 \\ \cdots \\ CI_n \end{pmatrix}$$

Então: $\mathbf{q \bullet P = CI}$

Para obtermos o custo total dos ingredientes (CP), usamos a matriz Q transposta e efetuamos a devida multiplicação:



$$\begin{pmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & \cdots & q_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P2 \\ P3 \\ \cdots \\ P_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} CP \end{pmatrix}$$

A partir da forma matricial obtemos então, o modelo matemático de forma sintética:

$$\mathbf{CI = Q^T \bullet P}$$

Para a produção da pizza utilizaremos o modelo desenvolvido:

Q_{nx1}	*	P_{nx1}	=	CI_{nx1}
2,7		1,16		3,132
0,05		1,28		0,064
0,1		0,45		0,045
30		0,025		0,75
750		0,0006		0,45
400		0,003		1,2
1		1,49		1,49
1	*	0,79	=	0,79
1		0,99		0,99
1		5,6		5,6
1		6		6
1,2		9,5		11,4
1		9,5		9,5
0,8		6,5		5,2
0,3		18		5,4
1		0,96		0,96
1		0,74		0,74
1		0,7		0,7

Qd_{nxn}	*	P_{nx1}	=	CI_{nx}

2,7																	
	0,05																
		0,1															
			30														
				750													
					400												
						1											
							1										
								1									
									1								
										1							
											1,2						
												1					
													0,8				
														0,3			
															1		
																1	
																	1

1,16
1,28
0,45
0,25
0,0006
0,003
1,49
0,79
0,99
5,6
6
9,5
9,5
6,5
18
0,96
0,74
0,7

3,132
0,064
0,045
0,75
0,45
1,2
1,49
0,79
0,99
5,6
6
11,4
9,5
5,2
5,4
0,96
0,74
0,7

$$\begin{pmatrix} 2,7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,05 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 30 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 750 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 400 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1,16 \\ 1,28 \\ 0,45 \\ 0,025 \\ 0,0006 \\ 0,003 \\ 1,49 \\ 0,79 \\ 0,99 \\ 5,6 \\ 6 \\ 11,4 \\ 9,5 \\ 5,2 \\ 5,4 \\ 0,96 \\ 0,74 \\ 0,7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,132 \\ 0,64 \\ 0,045 \\ 0,75 \\ 0,45 \\ 1,2 \\ 1,49 \\ 0,79 \\ 0,99 \\ 5,6 \\ 6 \\ 11,4 \\ 9,5 \\ 5,2 \\ 5,4 \\ 0,96 \\ 0,74 \\ 0,7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2,7 & 0,05 & 0,1 & 30 & 750 & 400 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1,2 & 1 & 0,8 & 0,3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1,16 \\ 1,28 \\ 0,45 \\ 0,025 \\ 0,0006 \\ 0,003 \\ 1,49 \\ 0,79 \\ 0,99 \\ 5,6 \\ 6 \\ 9,5 \\ 9,5 \\ 6,5 \\ 18 \\ 0,96 \\ 0,74 \\ 0,7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 54,41 \end{pmatrix}$$

Para resolver as equações matriciais utilizamos a ferramenta computacional, com o uso do Softwar Maple.

PROBLEMA II: A que preço devo vender para obter lucro 30%?

Considerando que:

Pf = preço final
q = quantidade produzida
D = custo de produção – despesas
L = lucro desejado $\left(1+\frac{i}{100}\right)$

Temos:

$$Pf_1 = \frac{D_{10}}{q_{10}} \bullet \left(1+\frac{i}{100}\right)$$

Numericamente, sendo D = 54,41; q = 10 e i = 30%, obtém-se como preço final

$$Pf \cong 7{,}07$$

Problema III : Qual é a variação da massa da pizza durante o seu tempo de descanso?

A massa da pizza pronta demonstrou os seguintes “valores” na balança:

t(minutos)	**m(gramas)**
O	543,5
10	543
20	542,6
30	542,3
40	542,2
50	542,1
60	542,1
70	542
80	542

Tabela II – tempo e massa

Utilizando o recurso gráfico, marcamos as medidas da massa no respectivo tempo:

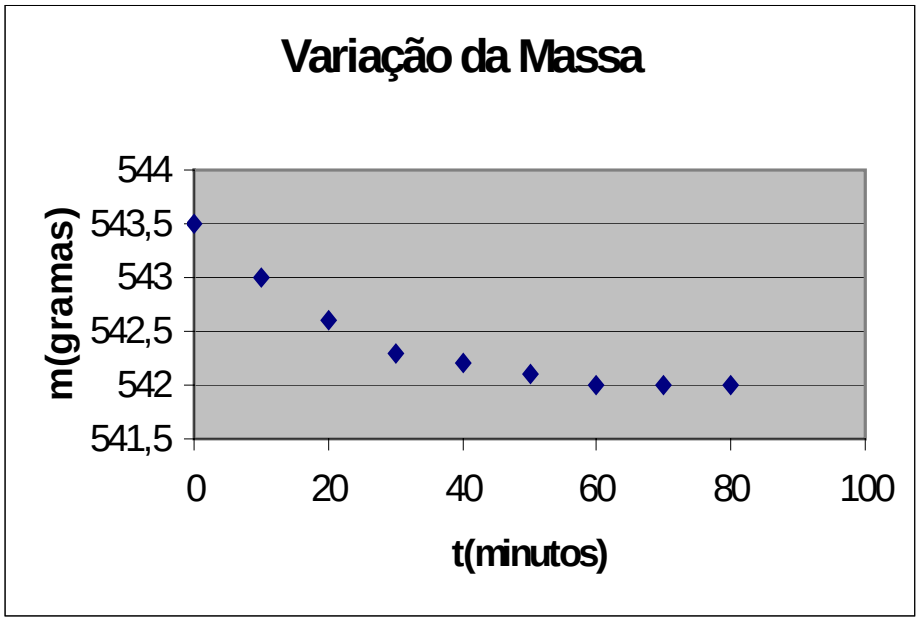


Tabela 3 –Variação da Massa

Propomos o uso de uma função exponencial para expressar a variação da massa em função do tempo:

$$\mathbf{M(t) = A \bullet e^{-kt} + mf}$$

onde: M = massa
t = tempo
A e K = constantes reais

Escolhemos dois pontos:

$P_1 = m_1 = A \bullet e^{-kt_1}$

$P_2 = m_2 = A \bullet e^{-kt_2}$

$m_1 = A \bullet e^{-kt_1}$

$\frac{m_1}{e^{-kt}} = A$

$A = m_1 \bullet e^{-kt_1}$

Substituindo em m_2 o valor de A:

$m_2 = m_1 \bullet e^{kt_1} \bullet e^{-kt_2}$

$$\frac{m_2}{m_1} = e^{k(t_1 - t_2)}$$

$$\ln \frac{m_2}{m_1} = \ln e^{k(t_1 - t_2)}$$

$$\ln \frac{m_2}{m_1} = k(t_1 - t_2)$$

$$k = \frac{1}{(t_1 - t_2)} \bullet \ln \frac{m_2}{m_1}$$

Exemplificando numericamente:

$P_1 \Rightarrow 543 = A \bullet e^{-k10}$

$P_2 \Rightarrow 542 = A \bullet e^{-k70}$

$A = m_1 \bullet e^{-kt10}$

$$k = \frac{1}{(10 - 70)} \bullet \ln \frac{542}{543}$$

$k = 0{,}000030721$

$A = 543 \bullet e^{-10k}$

$A = 442{,}8332052$

CONCLUSÃO

Podemos afirmar que a realização deste trabalho nos proporcionou uma nova visão sobre o ensino de Matemática contextualizado através da modelagem, pois permitiu uma construção diferenciada dos conteúdos envolvidos, despertando a curiosidade e o espírito investigativo.

Conseguimos constatar a importância de utilizarmos situações que partem da realidade, da prática, dando maior significado ao conteúdo, bem como ampliando, ressignificando nossos conhecimentos. Outro fator relevante a destacar é o da interdisciplinaridade. O fenômeno da variação da massa, por exemplo, tem sua explicação na Biologia e na Química, pois as misturas dos ingredientes da massa, especialmente do fermento que usa o açúcar para realizar a fermentação, liberam Gás Carbônico, tornando a massa mais leve e porosa.

Achamos conveniente que perceba-se o enfoque histórico do objeto de estudo como “ferramenta” a ser utilizada no momento em que melhor se encaixe dentro da estrutura e do andamento da atividade, podendo servir também como ponto de partida em outras disciplinas.

É importante considerar que um único trabalho não proporciona todas as transformações possíveis, necessárias ou desejadas, mas o uso continuado pode trazer grandes benefícios e realizar a ligação entre as idéias exploradas e o saber sistematizado.

Portanto, entendemos que o sucesso nos estudos depende simultaneamente dos sujeitos envolvidos, bem como da relação que possui coma as situações do cotidiano.

BIBLIOGRAFIA

BIEMBENGUT, Maria Salett. **Modelagem Matemática & Implicações no Ensino Aprendizagem de Matemática.** Blumenau: Furb, 1999.

http://www.chicopizzas.com.br/historia.htm Acesso em 02 dez. 2003.

SCHEFFER, Nilce Fátima. Modelagem Matemática: Uma Abordagem para o Ensino-Aprendizagem de Matemática. **Educação Matemática em Revista,** p. 11-16, maio. 1999.