Relato de Experiência

POR QUE INVERTER O SINAL DA DESIGUALDADE EM UMA INEQUAÇÃO?

GT 02 – Educação matemática no ensino médio e ensino superior.

Bruno Marques Collares, UFRGS, collares.bruno@hotmail.com
Diego Fontoura Lima, UFRGS, diegoprofmat@gmail.com

Resumo: O presente trabalho visa discutir sobre a mudança de "orientação", ou seja, da inversão de sentido da desigualdade de uma inequação polinomial do 1º grau a partir da comparação entre números reais. O problema surgiu durante discussões entre os bolsistas do PIBID, Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência da UFRGS, e um grupo de alunos do Instituto Estadual Professora Gema Angelina Belia,, em Porto Alegre, uma das escolas de atuação do PIBID-UFRGS, no subprojeto Matemática. Neste contexto, discutimos o significado de uma inequação polinomial e traduzimos este sentido através da comparação entre números reais. Por fim, apresentamos o que consideramos ser um reflexo desta discussão para os alunos da escola em questão, para os bolsistas e para professores que estiveram em contato com este diálogo. Nosso objetivo é apresentar uma síntese do conteúdo discutido em uma das aulas de inequações polinomiais do 1° grau.

Palavras-chave: Educação Matemática; Ensino; Inequações Polinomiais, Reta Numérica.

Introdução

Durante as aulas, nas quais estão envolvidas discussões sobre Inequações Polinomiais, possivelmente encontramos curiosos que se perguntam: "*Por que a orientação de uma inequação muda quando multiplicamos toda a expressão por um número negativo?*". Afinal, qual é a razão para que, quando multiplicamos toda a expressão por um fator real negativo, o sinal de desigualdade mude de orientação? Aqui, o termo "sinal" se refere justamente à orientação de "<" e ">". Vejamos um exemplo[1] que, provavelmente, surgiu durante o estudo de inequações polinomiais de primeiro grau, em alguma turma do ensino fundamental: "*Se* $2(2-z)<12$ *então* $z>-4$" (COXFORD, 1995, p. 235). Note que o enunciado começa com a hipótese, afirmando que "$2(2-z)$ *é MENOR que 12*", e finaliza com o resultado "z é MAIOR que -4". Esta manipulação algébrica

[1] O problema se encontra originalmente como "*Se* $2(2-z)<12$ *então* $z<-4$", no capítulo intitulado "Erros comuns em álgebra" (COXFORD, 2009).

causa estranheza e desconforto em muitos alunos da escola básica. Presenciamos, inclusive, colegas da graduação encontrando dificuldades com este tipo de justificativa, nos primeiros semestres de curso.

O estudo das inequações de 1° grau aparece claramente quando estamos verificando os sinais de uma função linear, normalmente no primeiro ano do Ensino Médio. De fato, os alunos, ao se depararem com este tipo de problema, podem encontrar certa dificuldade para compreender o porquê das mudanças de orientação do sinal das desigualdades, e, por esta falta de compreensão, acabam não levando em consideração esta propriedade.

Aqui, a proposta visa à tentativa de dar um sentido numérico para a mudança de $<$ para $>$, ou vice-versa, quando multiplicamos por um número real negativo uma desigualdade envolvendo incógnitas. O assunto surgiu em uma atividade desenvolvida com alunos do Curso Pré-Vestibular PIBID, criado no Instituto Estadual Professora Gema Angelina Belia, em Porto Alegre, organizado pelos bolsistas do PIBID-UFRGS do subprojeto Matemática. Alguns alunos, de fato, perguntaram a respeito dos porquês desta propriedade, e nossa tentativa foi convencê-los, não a partir de uma demonstração, mas na tentativa de criar um sentido para o problema.

Inequação Polinomial de grau 1

Primeiramente vamos entender em que contexto este problema se insere. Para nós, inequação polinomial de grau 1 é uma "*desigualdade que envolve uma grandeza desconhecida*" (LIMA, 2005, p.28). Como exemplo, podemos citar a resolução da seguinte inequação: "$2x > 4 \Leftrightarrow x > \frac{4}{2} \Leftrightarrow x > 2$". Nesta resolução não estão explicitados detalhadamente as operações realizadas em ambos os lados da desigualdade, tais que permitiram isolar a variável *x;* vejamos, com mais detalhes, o que ocorre durante a resolução em três passos:

$$\boxed{2x > 4 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} 2x \cdot \frac{1}{2} > 4 \cdot \frac{1}{2} \overset{(2)}{\Leftrightarrow} x > \frac{4}{2} \overset{(3)}{\Leftrightarrow} x > 2}$$

Resolução da inequação 1

Ambos os lados da inequação foram multiplicados por $\frac{1}{2}$, possibilitando a simplificação do número 2, que acompanhava *x*. Isto também permitiu a divisão do número 4 por 2, resultando, finalmente, $x > 2$. Este procedimento é o mesmo que empregamos à resolução de equações polinomiais de grau 1, na qual realizamos uma série de operações fundamentais (soma, multiplicação, potenciação, etc.), em ambas as partes da desigualdade, até encontrarmos o valor da incógnita. Destacamos que, no exemplo acima, a operação realizada foi a multiplicação por um número racional positivo. Essa operação não alterou a natureza da desigualdade.

Vejamos o que ocorre ao resolvermos a inequação $2(2-z) < 12$:

$$2(2-z) < 12 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} 2(2-z)\cdot\frac{1}{2} < 12\cdot\frac{1}{2} \overset{(2)}{\Leftrightarrow} 2-z < 6$$
$$\overset{(3)}{\Leftrightarrow} 2-z-2 < 6-2 \overset{(4)}{\Leftrightarrow} -z < 4 \overset{(5)}{\Leftrightarrow} -z\cdot(-1) < 4\cdot(-1)$$
$$\overset{(6)}{\Leftrightarrow} z > -4$$

Resolução em (6) passos

É comum os alunos encontrarem como soluções $z < -4$. Isto ocorre justamente no passo (5) da resolução acima. Em resumo, o equívoco cometido se dá por não alterarem o sentido da desigualdade. Esta propriedade afirma que "p*odemos multiplicar os dois membros de uma inequação por uma mesma quantidade negativa, desde que, ao mesmo tempo, troquemos o sinal de < pelo de >, e vice-versa*" (LIMA, 2005, p. 29).

Para tal, podemos propor aos estudantes uma discussão partindo da manipulação de desigualdades envolvendo números reais, tentando levá-los a compreender a propriedade mencionada.

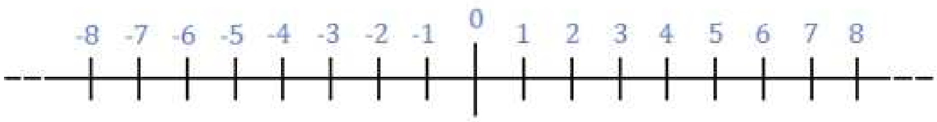
Desigualdade entre números reais

Quando comparamos números reais, costumamos utilizar os símbolos < e >. Por exemplo: sabemos que $\sqrt{5}$ é maior que 2, e isto é denotado por $\sqrt{5} > 2$, sendo o símbolo

$>$ indicador de que a quantidade à esquerda é maior do que a quantidade à direita. Em outras palavras, o símbolo $>$ reflete justamente a ordem dos números reais, em paralelo com a convenção da reta real, que se ordena positivamente da esquerda para a direita, isto é, se tomarmos um elemento da reta real e compararmos seu valor com algum outro elemento distinto a sua direita, certamente este segundo será maior. Exemplificando, tomamos, primeiramente, o número -2, e, em seguida, qualquer outro número distinto a ele a sua direita, digamos $-\frac{1}{4}$; este segundo elemento é certamente maior que -2; é uma questão de convenção esta ordenação da esquerda para a direita, e dizemos, então, que a reta dos números reais cresce à medida que avançamos para a sua direita.

Este fato de comparação de números parece ser um conceito bastante aceitável por parte dos alunos, isso sem mencionar a comparação de números racionais em sua forma fracionária ou a comparação de números irracionais. Porém, não é o intuito deste texto discutir as dificuldades dos alunos em comparar grandezas não inteiras.

A comparação entre números foi utilizada como argumento para facilitar o entendimento da propriedade supracitada. Vamos a alguns exemplos norteadores a partir da reta numérica:



Reta numérica [2]

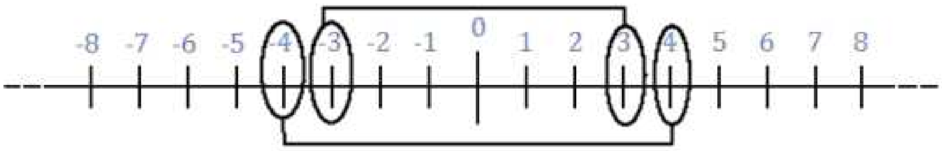
Tomemos como exemplo a reta numérica anteriormente citada, na qual estão representados, de maneira explícita, somente os números inteiros. Fica subentendida a existência dos demais números reais neste conjunto de pontos. Tomamos, primeiramente, os números 3 e 4. A comparação entre estes números será denotada por:

---

[2] Retirado de: http://www.bussolaprofissional.com.br/imagesV2/Reta_numerica.jpg

$$\boxed{3 < 4}$$

Se tomarmos, agora, os simétricos -3 e -4, sabemos, pelo fato da ordenação dos números reais, que o número -3 será maior que -4.



Tomamos os simétricos dos números 3 e 4

A reta acima já nos dá uma ideia de qual dos dois é maior. Realmente, -3 é maior que -4, pelo fato de estar mais a direita na reta numérica. Portanto, representamos assim:

$$\boxed{-3 > -4}$$

Note abaixo as duas desigualdades escritas lado a lado:

$$\boxed{3 < 4} \quad \boxed{-3 > -4}$$

Sabemos que, para encontrarmos o simétrico de um número real, basta multiplicar este número por "-1". Precisamente, é isso o que fizemos para encontrar -3 e -4, simétricos de 3 e 4, respectivamente. Quando representamos a ordem destes números com os sinais de < e >, podemos observar que tais sinais "mudaram". Tínhamos, inicialmente, 3 < 4; por fim, obtivemos -3 > -4.

É aceitável que isso ocorra, do ponto de vista dos sentidos que demos à comparação dos números; dado que, ao indicarmos que um número *a* é maior que um número *b*, denotamos por $a>b$, mas caso *a* seja menor que *b*, denotaremos $a<b$. O mesmo ocorre

quando estamos no universo das inequações polinomiais de grau 1. No exemplo "*Se* $2(2-z)<12$ *então* $z>-4$", trocamos < por > pelo mesmo fato que permutamos os sinais no caso da comparação entre -3 e -4 (justamente os simétricos de 3 e 4, obtidos a partir da multiplicação destes números por -1).

Reflexo das discussões para os alunos

A ideia surgiu em meio a uma aula que ministrávamos para alunos matriculados no curso pré-vestibular PIBID-MAT. Tão logo surgiu a pergunta, recorremos à comparação entre números reais para exemplificar um sentido para esta "mudança de orientação" da inequação; os conceitos foram discutidos tão logo a dúvida surgiu. O nosso objetivo, claramente, não era propor um exercício de demonstração, mas criar um significado para esta mudança de sinal e de orientação quando do produto por uma grandeza real negativa.

Assim que discutimos esse detalhe com os alunos, o fato de inverter a desigualdade se tornou um fator de maior cuidado quando eles resolviam problemas deste tipo. Um aluno afirmou, na ocasião: "*Eu nem dava bola para isso, agora parece bem mais claro e mais fácil de cuidar para eu não errar*". Outro aluno acreditou que esta discussão fosse uma "prova" para a dúvida surgida, mas logo outro colega salientou o que havíamos afirmado em alguns momentos, de que esta estratégia foi uma tentativa de aproximar a resposta à dúvida, a partir de conhecimentos prévios que já tinham trabalhado na escola. Criou-se aí uma perspectiva de que o significado desejado foi criado, e os alunos, aparentemente, compreenderam nossa intenção em trazer a dúvida deles a um campo numérico sem incógnitas, já conhecido deles, cujo objetivo era significar a propriedade mencionada. Acreditamos que nosso objetivo foi alcançado.

Reflexo das discussões para os bolsistas e professores

Em conversas com alguns colegas do curso de Llicenciatura em Matemática, percebemos que esta estratégia de explicação e de discussão com os alunos não fazia parte do repertório para auxílio em suas aulas. Por exemplo, muitos colegas trabalhavam em suas turmas inequações e ensinavam a propriedade sem, no entanto, justificavam sua aplicabilidade. A comparação entre números parece só ser mencionada no início do conteúdo, quando o professor deseja denotar os símbolos de < e >, e utiliza de exemplos numéricos pra convencioná-los. Porém, a ligação entre a propriedade mencionada neste texto e a comparação entre grandezas reais não parece ser uma prática comum. Alguns professores, com os quais tivemos contato, afirmaram que não conheciam essa abordagem numérica para dar sentido à mudança de orientação da inequação polinomial, quando multiplicada por um número negativo. Inclusive, estes professores se demonstraram surpresos, positivamente, com este tipo de argumento. Uma professora afirmou: "*Que boa essa explicação, ajuda os alunos a visualizarem melhor essa mudança de sinal*".

Para nós, essa discussão é fundamental do ponto de vista metodológico, pois, afinal de contas, estamos a todo o momento reciclando nossos repertórios e estratégias didáticas, buscando sempre uma melhor maneira de propiciar o aprendizado em sala de aula. É importante refletirmos acerca deste tipo de problema, tentando encontrar uma forma de criar sentidos que aproximem o significado da definição aos estudantes.

Conclusões

Este estudo foi apoiado no sinal que denotamos como comparador entre grandezas numéricas. Em geral, em uma inequação, temos duas grandezas numéricas sendo comparadas. Neste caso específico, há uma grandeza sendo analisada do ponto de vista do sinal da função linear. Portanto, temos uma comparação entre grandezas, e esta comparação é denotada pelos sinais < e >.

A intenção aqui não é demonstrar rigorosamente o caso descrito inicialmente. O intuito, neste momento, é permitir ao professor que tenha algum tipo de argumentação para definir a propriedade, que recai apenas na maneira com a qual se denota uma comparação entre duas grandezas reais.

Um professor deve, sempre que possível, tentar aproximar do aluno a compreensão desses "pequenos detalhes" algébricos. Não é necessário que se demonstre tudo o que é utilizado em aula. Contudo, pelo menos, podemos permitir ao aluno que faça uma comparação entre diferentes pontos de vista, fazendo sempre esta ligação entre os assuntos, conectando os sentidos de cada conceito.

Esse papel dinâmico que temos durante as etapas do aprendizado é o que torna a nossa profissão tão encantadora, a nosso ver. Devemos sair da zona de conforto para desafiar e sermos desafiados, e, assim, encontrar soluções para muitos dos problemas que nos deparamos durante os anos, dentro e fora da sala de aula.

Referências Bibliográficas

COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Albert P. As ideias da álgebra. Traduzido por Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual Editora, 1995.

LIMA, Elon Lages e outros. Coleção do Professor de Matemática: Temas e Problemas Elementares. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.