Comunicação Científica

OS NÚMEROS RACIONAIS NA REPESENTAÇÃO FRACIONÁRIA: UM ESTUDO DE CASO COM ALUNOS DO 6º ANO

GT 01 – Educação Matemática no Ensino Fundamental: Anos Iniciais e Anos Finais

Carla Luciane Viero Bravo, URI/Santiago- carlavierobravo@hotmail.com
Maria Arlita da Silveira Soares, URI/Santiago- arlita@urisantiago.br

Resumo: Este trabalho tem por objetivo apresentar algumas reflexões da prática pedagógica realizada com um grupo de alunos do 6º ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede pública municipal de Santiago/RS, ao estudar os significados e operações dos números racionais. Para a organização e seleção das atividades desenvolvidas com o grupo de alunos, optamos pela teoria dos Campos Conceituais e a metodologia da resolução de problemas, bem como por resultados de pesquisas na área da Educação Matemática. Com a realização desta prática pedagógica podemos constatar que a opção de utilizar a metodologia da resolução de problemas, bem como explorar as operações entre números racionais partindo do registro figural para os demais, enfatizando o invariante equivalência, destacado pela teoria dos Campos Conceituais contribuiu para os alunos atribuírem significados as regras já estudadas para essas operações.

Palavras-chave: Números Racionais; significados; operações.

1. Introdução

A Matemática é considerada uma disciplina muito importante para o cotidiano e o futuro de nossos alunos, pois ajuda o aluno estruturar seu pensamento, a estabelecer generalizações e fazer relações entre diferentes objetos e quantidades, contribuindo, assim, na resolução de situações-problema do dia a dia e de outras áreas do conhecimento.

Várias pesquisas e avaliações nacionais e regionais[1] apontam que os alunos não atingiram os níveis de conhecimento esperados para as séries analisadas em Matemática. Este fato pode estar relacionado a pouca apreciação pela disciplina e/ou não entendimento do quê e do por que do que estão estudando, ou seja, não atribuem significados para os conceitos matemáticos trabalhados na escola. Dentre os conteúdos matemáticos que os alunos apresentam grandes dificuldades, podemos destacar o conceito de número racional e seus diferentes significados.

Pesquisas recentes evidenciam dificuldades em relação ao conceito do número racional, tanto do ponto de vista do ensino quanto do ponto de vista da aprendizagem. Com

[1] MAGINA e CAMPOS (2008), SAERS (2007), Prova Brasil (2008), ...

relação ao ensino, o que se tem revelado, é uma ênfase exagerada em procedimentos e algoritmos, e uma forte tendência para introduzir esse conceito com base no significado parte – todo, geralmente, ensinado sem muito sentido para o aluno. Essas situações são, na maioria das vezes, apresentadas por figuras de um todo dividido em partes iguais, com algumas dessas partes pintadas ou hachuradas. A partir disso, são apresentados ao aluno os termos da fração; o total de partes em que o todo foi dividido corresponderá ao denominador e a quantidade de partes pintadas será o numerador da fração, trabalhando-se, a partir daí, com a representação a/b, sem explorar que essa representação assume diferentes significados dependendo do contexto: número, parte/todo, quociente, medida, operador multiplicativo. (MAGINA e CAMPOS, 2008)

No que diz respeito à aprendizagem, os alunos podem até apresentar algumas habilidades em manipular os números racionais, sem necessariamente ter uma compreensão clara desse conceito. Nunes, Bryant discutem que:

> Com as frações as aparências enganam. Às vezes as crianças parecem ter uma compreensão completa das frações e ainda não o tem. Elas usam os termos fracionais certos; elas falam sobre fração coerentemente; elas resolvem alguns problemas fracionais; mas diversos aspectos cruciais das frações ainda lhes escapam. De fato, as aparências podem ser tão enganosas que é possível que alguns alunos passem pela escola sem dominar as dificuldades das frações, e sem que ninguém perceba (NUNES; BRYANT, 1996 *apud* MAGINA; CAMPOS, 2008, p. 26).

Esta afirmação apresentada por Nunes e Bryant pode ser constatada quando observamos o baixo desempenho atingido pelos alunos brasileiros em avaliações nacionais frente a situações que envolvem o conceito de número racional, na sua representação fracionária, em questões bem próximas daquelas trabalhadas em sala de aula e apresentadas na maioria dos livros didáticos.

Além disso, os PCNs (1998) ressaltam o fato dos alunos chegarem ao terceiro ciclo, sem compreender os diferentes significados associados aos números racionais, bem como sem conseguirem operar com esses números. Cabe ressaltar que as operações na representação fracionária são, geralmente, decoradas pelos alunos, sem entendimento das regras. Sendo assim, o conceito de número racional precisa ser melhor explorado, especialmente, em situações, que levem o aluno a atribuir significado.

Diante deste contexto, os fatores que motivaram a realização de uma prática de ensino, envolvendo os diferentes significados do número racional e as operações, têm origem nos dados empíricos do baixo desempenho apresentado pelos alunos do município e nas avaliações nacionais e regionais frente a problemas que envolvem esse conceito.

A prática pedagógica aqui relatada foi realizada em 16 horas/aula, envolvendo uma turma de 6º ano do Ensino Fundamental de 9 anos, de uma escola da rede pública municipal da cidade de Santiago/RS. Para tanto, foram organizadas atividades envolvendo os significados dos números racionais, bem como as operações de adição, subtração e multiplicação, atividades essas apresentadas em pesquisas na área da Educação Matemática, em especial Silva (2005), Campos e Magina (2008). Devido à extensão da prática pedagógica, neste trabalho, relataremos o terceiro encontro, no qual trabalhamos as operações de adição e subtração de números racionais.

2. Os números racionais e a teoria dos Campos Conceituais

A história da matemática revela que o processo de construção dos números racionais não foi uma tarefa simples, pois foi necessário introduzir novos significados, em especial para as operações. Esse novo campo numérico surge para dar conta da necessidade de medir, a qual os números inteiros não davam conta.

Em relação ao processo de ensino aprendizagem os problemas que se apresentam envolvendo esses números são muito mais complexos. O aprendizado do número racional implica romper com muitas certezas e saberes que os alunos construíram desde o início da vida escolar, pois nos primeiros contatos, eles tentam transpor os conhecimentos já adquiridos sobre os números inteiros para esse outro universo numérico. Por exemplo, que ao multiplicarmos dois números o resultado é sempre maior que as parcelas.

Um número racional é o que pode ser escrito na forma a/b onde a e b são números inteiros, e b deve ser não nulo, isto é, $b \neq 0$. No entanto, essa notação a/b assume diferentes significados, dependendo do contexto que está inserida. São esses diferentes significados que devem ser trabalhados na escola, com o intuito de levar os alunos a compreenderem a importância desses números na Matemática, nas outras áreas do conhecimento e no próprio dia a dia. Para tanto, torna-se necessário buscar nos resultados das pesquisas em Educação Matemática teorias e metodologias que dêem suporte para a elaboração dos planejamentos, bem como realizar novas pesquisas sobre o processo de ensino aprendizagem do número racional e seus diferentes significados.

Para o planejamento e realização de um estudo, é necessário contar com o suporte de uma boa teoria com base na qual, todas as etapas da pesquisa sofrerão influência de seus pressupostos. Neste sentido, o desenvolvimento de nosso estudo baseou-se na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1983; 1988; 1990; 1993), além de considerarmos outras ideias teóricas, como os estudos de Nunes, Bryant (1997) em relação ao ensino e aprendizagem do conceito de número racional e os cinco diferentes significados: Número, Parte – todo, Medida, Quociente e Operador Multiplicativo.

Vergnaud (apud SILVA, 2007) parte da ideia de que o conhecimento está organizado em Campos Conceituais, ou seja, está organizado em grandes agrupamentos informais de problemas, situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos e operações de pensamentos obtidos durante um certo período de tempo, por meio de experiências, maturidade e aprendizagem. Acrescenta ainda que é possível contornar as dificuldades conceituais; estas são superadas na medida em que são encontradas e enfrentadas, o que não ocorre de uma só vez.

A Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1983, 1998, 2001), afirma que um conceito é formado por uma terna, a saber: um conjunto de situações, que dá significado ao objeto em questão, um conjunto de invariantes operatórios, que trata das propriedades e procedimentos necessários para definir esse objeto, e um conjunto de representações simbólicas, as quais permitem relacionar o significado desse objeto com as suas propriedades. (MAGINA e CAMPOS, 2008)

No que tange aos invariantes operatórios, estes podem ser explícitos, quando as propriedades do objeto e os procedimentos para resolvê-lo estão conscientes para o sujeito, ou podem ser implícitos, quando o sujeito faz uso correto dos procedimentos, porém não tem consciência das propriedades que subjaz esse procedimento que ele próprio usou para resolver o problema. (MAGINA e CAMPOS, 2008) Os invariantes do número racional são a ordem e a equivalência. Quanto a esses números, podemos refletir sobre eles a partir de diferentes situações em que aparecem com os diferentes significados.

Nesta perspectiva, significado é definido por Vergnaud (1983, apud FRANCHI, 1999), como sendo uma relação do sujeito com as situações e os significantes, de modo mais preciso os esquemas evocados no sujeito individual, por uma situação.

Os conceitos são mobilizados no cotidiano para dar conta dos desafios enfrentados pelo sujeito. Daí surge um aspecto importante do Campo Conceitual que diz respeito a um conjunto de situações. Os conceitos só adquirem sentido dentro de situações ou conjunto de situações. Portanto, para Vergnaud (apud FRANCHI, 1999) um dos pilares de um campo conceitual é o conjunto de situações, cujo domínio progressivo exige uma variedade de conceitos, procedimentos e representações simbólicas, todos em estreita conexão uns com os outros.

Neste sentido, o sujeito frente a uma nova situação mobilizará o conhecimento desenvolvido em sua experiência em situações anteriores e tentará adaptá-lo à nova situação. Para Vergnaud (apud FRANCHI, 1999), situação tem a ver com o contexto no qual o problema ou tarefa encontra-se inserido, de forma a contribuir, para que os conceitos presentes nessa situação ganhem significados.

Portanto, a aquisição do conhecimento, conforme Vergnaud (apud FRANCHI, 1999), dar-se-á por meio de situações-problema já conhecidas e esse conhecimento, tanto pode ser explícito – expresso de forma simbólica como implícito – usado dentro de uma ação, na qual o sujeito escolhe as operações adequadas frente a uma determinada situação sem, contudo, conseguir expressar as razões de suas escolhas.

Diante deste contexto, acreditamos que no processo de ensino aprendizagem do número racional faz-se necessário que o professor proponha ao aluno uma diversidade de *Situações* de tal forma que, ao tentar resolvê-las, o aluno possa reconhecer e manipular propriedades já conhecidas do objeto matemático em questão, bem como as relações entre esses objetos e essas propriedades – os *Invariantes* (equivalência e ordem), fazendo, para isso, uso das *Representações* (fracionária, decimal, figural, língua natural,...). Desta forma, ao tentar resolver situações variadas, os alunos buscarão esquemas já construídos anteriormente, tendo, assim, oportunidade de dar significado ao conhecimento matemático que está sendo desenvolvido. (apud SILVA, 2007)

3. Desenvolvimento da prática pedagógica: o terceiro encontro

O objetivo do terceiro encontro era resolver situações envolvendo as operações com os números racionais, além de reforçar o estudo dos diferentes significados do número racional. Para tanto, foram selecionadas e trabalhadas 12 atividades, as quais envolviam as operações de adição e subtração, partindo da representação figural, bem como os significados do número racional em sua representação fracionária.

Destacamos que, no inicio deste encontro os alunos estavam "*bem perdidos*", sem entender o que estava sendo proposto, demonstrando dificuldades em operar com os números racionais. Segundo Silva e Almouloud (2008, p. 59)

> A adição de números fracionários de mesmo denominador, normalmente, não apresenta complicadores para a compreensão dos alunos. A questão está em fazê-los entender que quando os denominadores são diferentes, as partes consideradas têm nomes diferentes, tais como meios, terços, quartos, dentre outras e, nesse caso, é necessário transformar as frações em questão, em outras equivalentes, que tenham mesmo nome, ou seja, que apresentem mesmo denominador.

No entanto, no grupo pesquisado as dificuldades ocorreram também na adição com denominadores iguais, isso porque as atividades trabalhadas em sala de aula exploravam apenas a representação numérica. Dificuldades estas, que evidenciamos ao propor uma figura, onde deveriam determinar a parte que estava pintada (figura 1), representando através da soma de frações cada uma destas partes. Neste caso, os alunos deveriam perceber que a referida figura estava dividida em três partes, sendo duas destas pintadas e ao demonstrarem pela soma de frações como solicitado, deveriam dar a sentença 1/3 + 1/3 = 2/3. Sendo assim, foi necessário propor e explicar para o grande grupo alguns problemas semelhantes. Neste momento, esperávamos que os alunos mobilizassem o procedimento de adicionar números racionais utilizando o mínimo múltiplo comum (mmc), mas isso não aconteceu, mesmo que não precisasse do mmc, pois neste caso tínhamos frações com o mesmo denominador. O que revela que esse procedimento não tem significado para eles.

Atividade 1
Determine a parte que está pintada das figuras e a represente como soma das frações que representa cada uma das partes pintadas.

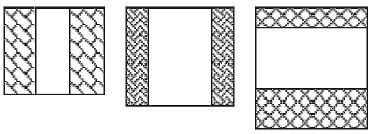

Figura 1: Atividade 1 do terceiro encontro
Fonte: Silva e Almouloud, 2008

Ao questionar os grupos sobre como resolveram a atividade 1 um deles comentou: *"Dividimos em partes iguais, porque não dá para fazer fração uma maior que a outra e daí a gente contou todos e as partes pintadas." (Grupo 1)*

Nesta fala, verificamos que os alunos estão dando importância para a equivalência, ou seja, a frase "*não dá para fazer fração uma maior que a outra*" quer dizer que para adicionarmos números racionais é preciso manter a equivalência.

A atividade 2 (figura 2) tinha por objetivo trabalhar com frações de denominadores diferentes e levar os alunos a atribuírem significados para o mmc, percebendo que "o produto dos denominadores é uma boa opção para a transformação em frações equivalentes e para a compreensão das regras para essa operação." (SILVA, ALMOULOUD, 2008)

Atividade 2
Identifique a parte pintada da figura ao lado por uma fração e a represente por uma soma de frações.

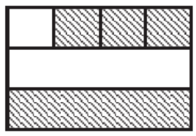

Figura 2: Atividade 2 do terceiro encontro
Fonte: Silva e Almouloud, 2008

Após algumas inervenções da pesquiadora, com intuito de mostrar que as partes eram diferentes, os alunos perceberam a necessidade de redividir a figura para tonrar as partes iguais, como podemos verificar na fala do grupo 2: "*É dividido em três partes e na primeira tinha quatro divididas e daí peguei e dividi o resto; peguei e somei quantos quadrinhos dava, deu doze; peguei os pintados que deu sete ...*"

Pela fala do grupo 2 e os demais grupos constatamos que a representação figural contribuiu para que eles encontrassem a resposta final 7/12, mas a atividade solicitava também que fosse representado como a soma de frações, ou seja, 1/3 + 3/12, que após a divisão em partes iguais poderia ser substituído por 4/12 + 3/12. Este procedimento foi feito pela pesquisadora junto ao grande grupo.

A atividade 3 (figura 3) tinha por objetivo retomar o que foi trabalhado na atividade 1 e 2.

3- Juntar a parte rosa e a amarela, expressando o resultado por uma única fração.

a) 

b) 

Figura 3: Atividade 3 do terceiro encontro
Fonte: Referencial Curricular do RS, 2009.

Ao analisarmos as falas dos grupos percebemos que a maioria já entendeu que para adicionar números racionais na representação figural era necessário obter tamanhos iguais, como podemos observar na fala do grupo 4: *"a) Contei o todo e daí deu dois quartos; o dois representa o rosa e o quatro o todo; a amarela tinha um quadrado pintado daí ¼, porque o quatro é o todo; daí ficou ¾. b) eu pensei em repartir tudo; porque primeiro tinha 2/4 de amarelo,* [e a parte rosa?][2] *partir no meio e daí virou oito pedaços e rosa tem 1/8; a soma é 5/8."*

O entendimento de como representar numericamente a ação sobre as figuras que estavam fazendo (redividir o todo) foi compreendida pelo grupo 2, já nesta atividade, o que para os demais grupos foi necessário mais atividades.

"Primeiro aqui para essa parte amarela são divididos em quatro e aí desses quatros duas patês são pintada de amarelo; daí deu 2/4; então eu tive que redividir aí em oito partes para fazer a rosa; deu 1/8; 2/4 é igual a 4/8 mais 1/8 deu igual a 5/8". Percebe-se que na fala da aluna do grupo 2 o entendimento da equivalência, tanto no registro figural (redividir para manter as figuras com mesmo tamanho) quanto na representação numérica ao afirmar que 2/4 é igual a 4/8. Neste momento, a escolha por partir da representação figural para as demais foi válida, pois ao questionarmos os alunos sobre como faziam para adicionar frações eles não mencionaram nenhum procedimento, o que revela que provavelmente o trabalho encaminhado em sala de aula não teve significado para eles.

Na atividade 4 (figura 4), os alunos deveriam, primeiramente, dividir o todo ao meio e pintar uma parte, depois redividir o todo para pintar 1/6. Sendo assim, o objetivo dessa atividade era levar os alunos a perceberem que para pintar 1/6 do retângulo era preciso dividi-lo em 12 partes iguais, logo ½ é igual a 6/12 e 1/6 igual a 2/12.

---

[2] Questionamentos da pesquisadora.

4- Primeiro pinte 1/2 do retângulo desenhado abaixo, depois pinte 1/6 do mesmo retângulo de outra cor. Qual a parte do retângulo que você pintou? Represente a sentença matemática que representa a solução do problema.

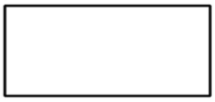

Figura 4: Atividade 4 do terceiro encontro
Fonte: Silva, 2005.

Nesta atividade, os alunos compreenderam rapidamente que precisavam dividir o todo ao meio e pintar essa parte, mas para pintar 1/6 do todo eles dividiram a outra metade em seis e pintaram uma parte. Após, os questionamentos da pesquisadora é que perceberam a necessidade de dividir as duas partes, ficando o todo divido em 12 partes. Além disso, como uma metade já estava pintada era preciso tomar da outra metade (dividida em seis partes) duas partes.

A fala do grupo 1 revela que para entenderem essa atividade foi necessário a intervenção da pesquisadora: "*A gente leu ali e fez como tá mandando, primeiro dividiu em 2, metade,* [que era ½ que estava pedindo] *e pintou e depois a gente partiu em seis pedaços um lado e depois o outro e daí deu 12* [o teu ½ que tu tinha virou quantos pedaços do teu todo?] *seis do todo* [daí era para considerar 1/6, daí quanto mais vocês pegaram?] *2/12* [que virou?] *8/12.*"

A atividade 5 é semelhante a atividade 4, visto que o procedimento é o mesmo o que muda é a representação figural, ao invés do retângulo temos uma reta. Os alunos perceberam rapidamente o que deveriam fazer para resolvê-la. Já a atividade 6 apresentava a mesma situação no registro numérico. Acreditávamos que os alunos poderiam utilizar o mmc, mas isso não aconteceu, pois eles utilizaram os resultados obtidos na ação sobre a representação figural.

5- Pinte 1/2 do segmento desenhado abaixo. Logo a seguir pinte de outra cor 1/6 do mesmo segmento. Que parte do segmento você pintou?

6- Calcule $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$

Figura 5: Atividades 5 e 6 do terceiro encontro
Fonte: Silva, 2005.

A atividade 7 é semelhante as atividades anteriores. Nesta atividade, os alunos já resolveram com certa facilidade, pois já estava claro a ideia de que para adicionar frações era necessário tamanhos iguais.

7- Qual seria a parte pintada de um retângulo se pintássemos $1/2 + 2/5$ desse retângulo?

Figura 6: Atividade 7 do terceiro encontro
Fonte: Silva, 2005.

Optamos para explorar a subtração de frações com denominadores diferentes pela atividade 8 (figura 7). Nesta situação, era preciso dividir a parte pintada da figura em quatro partes de mesma área e como essa parte foi dividida as outras duas também devem ser divididas em quatro partes também, sendo que esse entendimento foi o mais complicado dos alunos compreenderem. Os alunos só conseguiram resolver essa atividade depois de vários questionamentos da pesquisadora.

Atividade 8

Se apagássemos $\frac{1}{4}$ da parte pintada do retângulo abaixo, que parte desse retângulo permaneceria pintada? Dê a sentença matemática que representa o que você fez.

Figura 7: Atividade 8 do terceiro encontro
Fonte: Silva e Almouloud, 2008

É importante registrar que essa atividade também foi aplicada na turma da pesquisadora quando estavam no sétimo semestre do curso de Matemática e as dificuldades eram bem semelhantes às apresentadas pelos alunos, ou seja, perceber que o todo deveria ser divido em 12 partes. Já nas atividades semelhantes à atividade 4 os acadêmicos, primeiramente, resolveram numericamente, utilizando o mmc, o que revela que o invariante equivalência, fundamental para a atribuição de significados nas operações de adição e subtração não foi mobilizado por esse grupo.

A atividade 9 exige o mesmo procedimento da atividade 8. No entanto, nesta atividade, os alunos já resolveram com certa facilidade. Isso porque como dividir o todo ainda gerava algumas dúvidas, visto que temos denominadores que são múltiplos entre si, o que não aconteceu na atividade anterior. Assim, era preciso dividir cada metade em 4 partes.

9- A parte amarela menos uma parte correspondente a $\frac{1}{8}$ do inteiro.

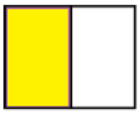

Figura 8: Atividade 9 do terceiro encontro
Fonte: Referencial Curricular do RS, 2009.

Ainda, neste encontro, foram trabalhadas três atividades (figura 9) envolvendo o invariante ordem.

10- Numa festa uma criança comeu $\frac{3}{8}$ dos doces de uma bandeja e outra criança comeu $\frac{3}{7}$ de outra bandeja igual à primeira. Quem comeu mais?
11- Em uma pizzaria seis pessoas de uma mesa comeram quatro pizzas e numa outra mesa três pessoas comeram duas pizzas do mesmo tamanho. Em que mesa as pessoas comeram mais pizza?
12- Se dividirmos três bolinhos iguais entre quatro crianças e quatro bolinhos de mesmo tipo entre outras cinco crianças quem come mais?

Figura 9: Atividades 10, 11 e 12 do terceiro encontro
Fonte: Adaptada Silva, 2005.

Para desenvolver essas atividades foi realizada a divisão de balas (para substituir os doces) e bolos. Isso porque a noção de ordem nos racionais exige dos alunos uma análise diferente da dos naturais. Neste encontro, os alunos não apresentaram dificuldades como às apresentadas anteriormente.

4. Considerações Finais

Durante a realização dos encontros com o grupo de alunos, confirmamos os resultados de várias pesquisas correlatas, isto é, o significado *parte-todo* é o mais trabalhado em sala de aula pelos professores em relação ao conceito de número racional em sua representação fracionária. As operações são trabalhadas por meio de regras, as quais os alunos não atribuem significados e, portanto, não conseguem mobilizar os invariantes necessários na resolução de situações-problema.

Acreditamos que algumas das dificuldades encontradas pelos alunos, se deram principalmente pelo fato destes, não estarem acostumados a trabalhar com a metodologia da resolução de problemas, ou seja, eles deveriam propor estratégias de solução para cada situação antes do professor explicar, mobilizando os conhecimentos anteriores.

Diante do exposto, salientamos a importância do papel do professor, pois cabe a ele a cuidadosa escolha e adequação das situações que evolvem e dão significado ao conceito de número racional. Durante o nosso estudo percebemos que há necessidade de rediscutir as formas como os conteúdos matemáticos e, em especial, no estudo das operações com números racionais, são introduzidos, pois a opção de partir do registro figural para os demais, enfatizando o invariante *equivalência*, destacado pela teoria dos Campos Conceituais contribuiu para os alunos atribuírem significados as regras já estudadas para essas operações. Finalmente, ao refletirmos sobre a nossa intervenção didático-pedagógica, acreditamos que conseguimos amenizar as dificuldades apresentadas pelos alunos, pois, esta nos permitiu irmos além do avanço da compreensão do objeto matemático (fração).

Referências

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília, DF, 1998.

FRANCHI, A. *Considerações sobre a teoria dos campos conceituais*. In: MACHADO, S. D. A. Educação Matemática: Uma introdução. São Paulo: EDUC, 1999, p. 155 – 196.

MAGINA, S.; CAMPOS T. *A fração nas perspectivas do professor e do aluno dos dois primeiros ciclos do ensino fundamental*. Bolema, Rio Claro, SP, Ano 21, nº 31, 2008, p. 23 a 40.

MOUTINHO, L. V. *Fração e seus diferentes significados: um estudo com alunos das 4ª e 8ª séries do ensino fundamental.* Dissertação de Mestrado. PUC/SP – 2005.

NUNES, T.; BRYANT, P. *Crianças fazendo matemática.* Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. *As diferentes "personalidades" do Número Racional trabalhadas através da Resolução de Problemas*. Bolema. Rio Claro, Ano 21, Edição n. 31, p. 79-102, 2008.

RIO GRANDE DO SUL. *Secretaria de Estado da Educação. Departamento Pedagógico. Lições do Rio Grande: Referencial Curricular / Ensino Fundamental.* Porto Alegre: SE/DP, 2009.

SILVA, M. J. F. *Investigando saberes de professores do ensino fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série.* Dissertação de Doutorado. PUC/SP – 2005.

SILVA, M. J. F., ALMOULOUD, S. A. *As operações com números racionais e seus significados a partir da concepção parte-todo.* IN: Bolema, Rio Claro, ano 21, nº 31, 2008, p. 55 a 78.

SILVA, A. F. G. *O desafio do desenvolvimento profissional: análise da formação continuada de um grupo de professores das séries iniciais do ensino fundamental, tendo como objetivo de discussão o processo de ensino e aprendizagem das frações.* Dissertação de Doutorado. PUC/SP – 2007.