X Encontro Gaúcho de Educação Matemática
02 a 05 de junho de 2009, Ijuí/RS

ATIVIDADES TERAPÊUTICAS DE CÁLCULO I-A

GT 02 – Educação Matemática no Ensino Médio e Ensino Superior

Bruno Pimentel Franceschi Baraldo – UFRGS – brunobaraldo@yahoo.com.br
Rene Carlos Cardoso Baltazar Júnior – UFRGS – rene.baltazar@ufrgs.br
Fernando Rodrigues de Oliveira – UFRGS – fernando.teco@pop.com.br

Resumo: O presente trabalho descreverá a experiência dos autores nas atividades do projeto de acompanhamento das turmas especiais da disciplina de Cálculo IA (MAT01353) da UFRGS. Todos foram bolsistas de extensão vinculados ao projeto em diferentes semestres. A experiência será relatada a partir do nosso ponto de vista, trazendo o que nós consideramos mais importante na prática realizada e não sendo, portanto, nossa intenção dar conta de todas as questões que envolveram a atividade. Enquanto bolsistas de extensão, trabalhamos através do registro das falas e da escrita de alunos, monitores e professor, tendo como foco as estratégias de resolução dos problemas, as dificuldades de aprendizagem e a interação entre professor, monitor e alunos. Foram realizadas análises de provas, questionários e entrevistas com os alunos. Ao longo dos semestres de trabalho, pretendeu-se também propiciar um atendimento individualizado aos alunos dessas turmas, orientado para as necessidades e dificuldades evidenciadas na coleta e análise dos registros. A análise dos dados foi regularmente discutida com os professores das referidas turmas e apresentada aos professores da disciplina de Cálculo I. Apresentaremos, ainda, exemplos de resoluções retirados das provas realizadas na disciplina, os quais ilustram o trabalho realizado, sendo interpretados a partir de determinadas referências teóricas.

Palavras-chave: Funções; Aprendizagem; Cálculo.

Introdução

Visando contribuir para a superação das dificuldades dos estudantes, o Programa Pró-Cálculo da UFRGS promoveu, de 2003 até o segundo semestre de 2007, o projeto Atividade Terapêuticas de Cálculo IA, consistindo no acompanhamento das Turmas Especiais de Cálculo I-A. Os trabalhos tiveram por objetivo atender a alunos que cursavam a disciplina *Cálculo e Geometria Analítica – IA*, matriculados nas turmas especiais dessa disciplina, destinadas a estudantes que já haviam obtido ao menos dois conceitos D e, no máximo, um conceito FF na disciplina. Os alunos estavam regularmente matriculados nos mais diversos cursos da Universidade que tem por obrigatória a referida disciplina na sua grade curricular. Citamos como exemplos os cursos de Física, Química, Matemática e todas as Engenharias. (Uma lista completa de cursos está disponível em www.ufrgs.br). As atividades aqui descritas, bem como as análises realizadas, dizem respeito ao semestre de 2007/02.

A Turma Especial possuía uma dinâmica de trabalho diferenciada das demais turmas de Cálculo I. As aulas eram divididas em dois momentos distintos. Primeiramente, a professora apresentava, de forma breve, o conteúdo e então os alunos passavam a trabalhar resolvendo exercícios em pequenos grupos. Os exercícios abordados em aula eram retirados do livro *Cálculo Vol. 1* (8ª edição), de Howard Anton, Irl Bivens e Stephen Davis, adotado na disciplina. Durante esse trabalho, a professora prestava atendimento e solucionava dúvidas, sendo auxiliada pelo bolsista de extensão. Além de trabalhar com questões específicas do Cálculo, a dinâmica ainda possibilitava aos alunos uma maior reflexão sobre seus próprios hábitos de estudo e o quão eficientes eles demonstram ser. O bolsista, nessa dinâmica de trabalho, teve um papel de grande importância. Foi função do bolsista, em alguns momentos, servir de ponte entre o professor e os alunos, solucionando dúvidas de maneira individualizada, anotando comentários e falas dos alunos. Para essas e outras tarefas, a condição de licenciando em Matemática foi fundamental, pois contribuiu para a qualificação das intervenções e, reciprocamente, enriqueceu a nossa formação de professor. Quanto ao material e às atividades realizados em sala de aula, trataram-se dos mesmos utilizados nas demais turmas da disciplina. É importante estar claro que, apesar da dinâmica diferenciada em sala de aula, a turma especial trabalhou com o mesmo conteúdo que as demais turmas, respeitando o cronograma geral da disciplina e realizando as mesmas avaliações.

Os bolsistas de extensão tiveram, ao longo dos semestres, diversas obrigações. Uma delas, parte fundamental do projeto, consistiu em estar presente em todas as aulas ministradas, três vezes por semana. A presença nos dois momentos de cada aula é muito importante. Em um primeiro momento, enquanto acontecia a exposição do conteúdo, procurávamos estar atentos à linguagem empregada pelo professor e às perguntas e observações feitas pelos alunos. Dessa forma, era possível coletar informações e falas, as quais serviam de subsídio para a ação do professor, que passava a ter mais possibilidades de avaliar a sua própria aula e o desenvolvimento dos alunos. Em um segundo momento, os bolsistas passavam a ajudar os alunos na resolução de exercícios. Além disso, esse momento também era aproveitado para se fazer anotações de perguntas, raciocínios, dificuldades e estratégias de resoluções de problemas expressados pelos alunos.

As Concepções de Funções

Existiu, durante o projeto, um esforço extra-classe para se acompanhar o desempenho individual dos alunos. A análise das provas realizadas pelos estudantes foi parte fundamental desse trabalho. Essa análise acabou por servir de subsídio para as ações em sala de aula, norteando os trabalhos dos bolsistas e do professor. O conjunto de informações coletadas aliou-se às observações feitas em sala de aula. Dessa maneira, tornou-se possível encontrar as principais dificuldades dos alunos e enxergar os avanços que ocorriam ao longo do semestre.

Além disso, a análise das provas de alunos permite que entendamos um pouco mais das suas concepções. Essas serviram de embasamento para apresentações realizadas em salões de Iniciação Científica, Extensão e seminários sobre ensino de Matemática. Os dados coletados, bem como suas respectivas interpretações, encontram-se compilados em diversos relatórios construídos a partir da análise de provas de estudantes que cursaram a disciplina em diferentes semestres.

Sabe-se que o entendimento de funções é fundamental para o estudo do Cálculo Diferencial e Integral já que o estudo de funções reais de uma variável real é o foco dessa disciplina. Assim, esse foi o principal conceito matemático trabalhado e foi ele que esteve no centro das análises das avaliações. Tendo isso em vista, procuramos embasar a interpretação das produções em referências teóricas que nos permitissem compreender, mesmo que de forma parcial e limitada, a maneira como os estudantes concebem as funções. Dentro desse estudo, evidentemente surgiram outros conteúdos matemáticos e outras dificuldades os quais aparecem simultaneamente no momento em que um aluno está resolvendo uma questão. Temos, abaixo, alguns exemplos de produções de alunos que passaram pelo projeto. Esses foram retirados do relatório *Análise de produções de alunos da Turma Especial de Cálculo IA da UFRGS*, construído a partir da coleta de dados no semestre de 2007/02.

Sabendo ser de extrema importância entender as concepções de função dos alunos, pretendemos fazê-lo a partir das análises das provas dos alunos. Para tanto, buscamos os estudos que Dubinsky & Harel (1992) e Palis (2002) realizaram nesse âmbito. A partir da literatura pesquisada, tentamos compreender um pouco da maneira como os alunos enxergam e entendem as funções. Tal entendimento possibilita colocar-se no lugar dos estudantes e, portanto, ajuda a subsidiar as ações de sala de aula e entender a origem das suas dificuldades. Portanto, empenhamo-nos em compreendê-las. Realizamos nossa análise a partir do referido estudo de concepções de funções dos estudantes e, por fim, tomamos também a perspectiva adotada por Guy Brousseau (apud SILVA, 1999), através da sua idéia de *Contrato Didático*.

De início, tomamos as definições de Dubinsky & Harel (1992). (A tradução e os grifos são nossos).

> Uma *concepção ação* de função envolve a habilidade de substituir números em expressões algébricas e calcular. Trata-se de uma concepção **estática** onde o sujeito tende a pensar um passo de cada vez. (...) Uma *concepção processo* de função envolve uma transformação **dinâmica** de quantidades. O sujeito está apto a pensar sobre a transformação como uma atividade completa, começando com objetos de algum tipo, fazendo algo com esses objetos e obtendo novos objetos como um resultado do que foi feito anteriormente.

É comum encontrar nos alunos recém egressos na Universidade uma “concepção ação” (PALIS, 2002) de funções. Nessa concepção, o aluno considera um par (x, f(x)) de cada vez, não encarando funções como sendo processos que recebem determinadas entradas e devolvem saídas. Essa maneira de pensar funções é um obstáculo para a aprendizagem dos conceitos no Cálculo, pois limita o aluno a trabalhar com expressões algébricas, estando apto apenas a substituir valores em expressões. Vejamos, abaixo, os exemplos de número 1 e 2, onde a maneira como os alunos lidam com funções se encaixam na definição de Concepção Ação apresentada. Isto é, esses estudantes são capazes apenas de substituir valores em uma determinada fórmula, sendo essa a sua única ferramenta para decidir a veracidade da afirmação.

<u>Exemplo 1:</u>

• **Questão 2** (2,0 pontos): Em cada item abaixo, determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, assinalando **V** ou **F**, respectivamente. Justifique suas respostas.

( ) Se f é uma função tal que $f(3) = 6$, então $f'(3) = 0$.

Para decidir a veracidade da implicação, a aluna baseia-se em alguns exemplos de funções. Escreve:

$$
\begin{array}{lll}
f(x) = x + 3 & f(x) = x^2 - 3 & f(x) = -x + 9 \\
f(3) = 3 + 3 = 6 & f(3) = 3^2 - 3 = 6 & f(3) = -3 + 9 = 6 \\
f'(x) = 1 & f'(x) = 2x & f'(x) = -1 \\
f'(3) = \nexists & f'(3) = 2.3 = 6 & f'(3) = \nexists
\end{array}
$$

A partir dos exemplos a aluna nota que existem funções onde $f(3) = 6$ mas, por outro lado, $f'(3) \neq 0$. Assim, decide pela falsidade da afirmação. Porém, devemos notar o que a aluna expressa quando calcula $f'(3)$ na primeira e na terceira função. Note que, nesses dois casos, a aluna o símbolo “não existe”, mesmo tendo calculado a derivada da função de maneira correta. Aparentemente isso se dá pelo fato de não haver variável *x* na lei da derivada, o que permitiria à estudante substituí-la pelo valor 3. Não havendo essa possibilidade, ou seja, não sendo possível substituir um valor na função para então fazer contas, a aluna não sabe como trabalhar. Uma situação semelhante aparece no próximo exemplo.

<u>Exemplo 2:</u>

• **Questão 2** (2,0 pontos): Em cada item abaixo, determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, assinalando **V** ou **F**, respectivamente. Justifique suas respostas.
( ) As funções $f(x) = \sqrt[3]{9-x^2}$ e $g(x) = \sqrt{9-x^2}$ possuem o mesmo domínio.

O aluno afirma que a afirmação é verdadeira, escrevendo:

$$\begin{array}{llll}
\sqrt[3]{9-1^2} = \sqrt[3]{8} = 2 & \sqrt[2]{9-1^2} = \sqrt[2]{8} = 2\sqrt{2} & 9-x^2 \geq 0 & Dom = \{x \in \Re \,/\, x \leq 3\} \\
\sqrt[3]{9-2^2} = \sqrt[3]{5} & \sqrt[2]{9-2^2} = \sqrt[2]{5} & -x^2 \geq -9 & \\
\sqrt[3]{9-3^2} = \sqrt[3]{\phi} & \sqrt[2]{9-3^2} = \sqrt[2]{\phi} & x^2 \leq 9 & \\
\sqrt[3]{9-4^2} = \sqrt[3]{-7} & \sqrt[2]{9-4^2} = \sqrt[2]{-7} & x \leq \sqrt{9} & \\
\sqrt[3]{9+1^2} = \sqrt[3]{10} & \sqrt[2]{9+1^2} = \sqrt[2]{10} & x \leq 3 & \\
\sqrt[3]{9+4^2} = \sqrt[3]{13} & \sqrt[2]{9+4^2} = \sqrt[2]{13} & &
\end{array}$$

Assim como na situação anterior, para decidir a veracidade da implicação, o aluno recorre à substituição de valores nas leis das funções dadas. Em ambas as fórmulas, ele substitui *x* por números naturais partindo do 1, parando apenas quando algo que lhe parece um problema ocorre. Quando calcula *f(4)* e *g(4)*, o aluno obtém como resposta raízes de números negativos, cúbica e quadrada, respectivamente. Perceba que, a partir daí, ele cessa o teste de inteiros positivos e passa a analisar os negativos. Por gerar essas raízes "estranhas", o aluno pode ter concluído que o número 4 não está no domínio das funções, e que, portanto, esse se estende somente até o número 3, o que evidenciaria uma visão discreta dos números reais. Além disso, essa estratégia de resolução parece estar associada à conhecida "tabela de valores" que os alunos constroem repetidamente ao longo do ensino médio e que, sabemos, não nos dá informações acerca das características gerais de uma função. Por outro lado, note que após os testes, o aluno expõe um raciocínio genérico, mas que esse parece não ser suficiente para responder a questão. O segundo argumento apenas reforça o que a substituição de pontos já havia mostrado, ou seja, que o domínio das funções abrange todos os números menores ou iguais a 3.

Através do segundo exemplo, percebemos como são fortes os modelos que os estudantes carregam consigo desde o ensino básico. Suas impressões sobre o que é um problema de matemática, bem como suas idéias de como são resolvidos, definitivamente repercutem nos estudos do ensino superior. Nessa perspectiva segue a idéia de Contrato Didático, da maneira como foi descrita por Brousseau. Escreve (apud SILVA, 1999):

> Chama-se contrato didático o conjunto de comportamentos do professor que são esperados pelos alunos e o conjunto de comportamentos do aluno que são esperados pelo professor... Esse contrato é o conjunto de regras que determinam, uma pequena parte explicitamente mas sobretudo implicitamente, o que cada parceiro da relação didática deverá gerir e que, de uma maneira ou de outra, ele terá de prestar conta perante o outro.

No exemplo 2, imaginamos que o aluno tenha realizado sua segunda parte da resolução, envolvendo a variável *x* e sinais de desigualdades, por acreditar ser aquilo que o professor esperava dele. Se julgasse suficiente fazê-lo, não precisaria ter recorrido às substituições nas leis das funções.

No caso específico da matemática, também Chevallard (apud SILVA, 1999) descreve as características do contrato didático vigente. Coloca o autor, entre outras:

> - sempre há uma resposta a uma questão matemática e o professor a conhece.
> - para resolver um problema é preciso encontrar os dados no seu enunciado.
> - em matemática resolve-se um problema efetuando operações. (...) Certas palavras-chave no enunciado permitem que se adivinhe qual é ela.

Notamos que muitos alunos tinham a idéia de que, para se resolver um problema de matemática, é preciso fazer simplificações, usar “macetes” para facilitar suas operações, “cortar” elementos nas equações para, através de contas, poder encontrar a (única) resposta, numérica, para o problema. Vemos, no exemplo 3, como determinados tipos de funções são de tal forma enfatizados que os alunos passam a considerá-los representativos de todas as funções.

<u>Exemplo 3:</u>

• **Questão 2** (2,0 pontos): Em cada item abaixo, determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, assinalando **V** ou **F**, respectivamente. Justifique suas respostas.

( ) Se f é uma função tal que $f(5) = 1$, então $f'(5) = 0$.

A aluna responde **V**. Escreve:

para uma
função genérica:
temos:

$f(x) = mx + b$

$f(x) = 1x - 4$

$f(5) = 5 - 4 = 1$ *ok!*

$f(5) = 5 - 4 = 1 \Rightarrow f(5) = 1$

derivando a $f(5)$

$f'(5) = 0$ *ok!*

Note que o aluno busca pensar uma função de forma genérica. Porém, ao fazê-lo, escreve sua função na forma $f(x) = mx + b$. Assim, parece só conceber funções (genéricas) quando essas são da forma da função linear, provavelmente porque essa é a família de funções mais repetidamente tratada ao longo das aulas de matemática pelas quais passou. Após, acaba recorrendo a um exemplo, onde as variáveis m e b assumem valores escolhidos de tal forma que as condições do enunciado se satisfaçam.

O aluno pode pensar, ainda, que essa "função genérica", escrita na forma $f(x) = mx + b$, seja aquilo que o professor deseja que ele apresente. Ou seja, ele buscaria reproduzir nas avaliações uma determinada linguagem matemática com a qual o professor lida no quadro-negro, mesmo que essa não tenha sentido para si. Esse exemplo mostra como uma mesma situação pode ser analisada sob diferentes óticas e nos sugere a complexidade e não-linearidade dos processos de aprendizagem. Por fim, apresentamos o exemplo 4, onde é tratada a compreensão da integral.

Exemplo 4:

• **Questão 1** (1,5 pontos):

a) As funções f e g possuem a mesma função derivada. Sabendo que $f(x) = x^2 - 3x$ e que $g(1) = 5$, determine $g(x)$.

b) Um ponto move-se no plano, ao longo do gráfico da função $y = f(x)$, de tal modo que, em cada ponto (x, y) do gráfico, a reta tangente possui inclinação $-sen(2x)$. Determine $f(x)$, sabendo que o gráfico de f passa pelo ponto $(\frac{\pi}{6}, 1)$.

A resolução do item **b** do exercício sugere como os conhecimentos podem encontrar-se fragmentados para o aluno. Escreve:

$$f(x) = \int_{\pi/6}^{1} -sen(2x)dx = -\frac{1}{2}\int_{\pi/3}^{2} senudu$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} \to u = \dfrac{\pi}{3} \\ x = 1 \to u = 2 \end{array}}$$

$$= -\frac{1}{2}\left[-\cos u\right]_{\pi/3}^{2} = \frac{1}{2}(\cos 2 - \cos\frac{\pi}{3}) = f(x)$$

Note que o aluno, logo de início, busca usar todos os dados fornecidos pelo problema. Parece haver, aí, uma das regras implícitas relatadas por Chevallard (idem), já que se entende que um problema de matemática deve ser resolvido fazendo contas e que se deve usar todos os dados fornecidos no enunciado da questão. Note que, para encontrar $f(x)$, a aluna se dá conta de que é necessário integrar $-sen(2x)$. Porém, toma as coordenadas do ponto dado e as usa como limites de integração. Veja que a $f(x)$ encontrada na verdade é uma constante, fato esse que aparentemente não gera contradição para a aluna.

Acompanhamento de estudantes no Cálculo II

Durante o segundo semestre de 2008, realizamos na UFRGS o projeto para o acompanhamento de estudantes de Cálculo II, cujo principal objetivo era compreender quais são as novas dificuldades apresentadas na disciplina Cálculo II e o qual sua relação com as dificuldades apresentadas enquanto esses estudantes cursavam o Cálculo I. O projeto, ainda não finalizado, procura desenvolver uma análise detalhada de provas apresentadas por estudantes que participaram do Projeto Pró-Cáculo e atendê-los em entrevistas, na qual o aluno participa resolvendo exercícios e esclarecendo suas dúvidas sobre o conteúdo. A atividade é destinada aos estudantes que participaram das turmas especiais de Cálculo I.

Considerações finais

A análise das questões gerou diversas repercussões nos sujeitos envolvidos no projeto. Como dissemos, serviu de subsídio para as ações do professor e dos bolsistas em sala de aula, já que a partir delas foi possível detectar os principais tipos de estratégias que os alunos se utilizam para resolver problemas e os erros mais comuns nos quais incorrem. Assim, a ação em sala de aula se tornou mais qualificada, na medida em que conhecíamos os alunos individualmente e sabíamos onde deveríamos intervir para que houvesse um melhor aproveitamento do tempo. Além disso, esse exercício pelo qual passamos foi, sem dúvida, de grande relevância na nossa formação de professores de matemática.

Ao longo dos semestres nos quais o trabalho foi desenvolvido, foi possível diagnosticar uma série de resultados positivos. O sucesso individual de alunos que superaram, mesmo que somente em parte, suas dificuldades é, também, o sucesso do modelo adotado pelo Projeto. No semestre de 2007/02, período no qual coletamos alguns dos dados aqui apresentados, por exemplo, mais uma vez, os índices foram satisfatórios. De um total de 32 alunos que obtiveram presença mínima na disciplina, foram aprovados 21 deles. Ou seja, se descontarmos os evadidos, obtemos um índice de aprovação de aproximadamente 66%.

A experiência de mais um semestre de trabalho na Turma Especial mostra que é útil e necessário promover mudanças na dinâmica das turmas de Cálculo. Além de índices de aprovação muito positivos, muitos alunos que freqüentaram a Turma Especial deram uma excelente resposta no sentido de mudar hábitos de estudo ineficientes, agir com mais autonomia e efetivamente superar suas dificuldades matemáticas. Aí, portanto, as Turmas Especiais, por promoverem um atendimento personalizado e acompanharem os alunos de perto, conseguem dar uma resposta mais bem sucedida na superação dessas dificuldades. Sabemos, porém, que outros tópicos ainda devem ser investigados mais a fundo. Assim, a continuidade do Projeto é fundamental para promover o aprofundamento dos debates já iniciados e dar abertura às discussões sobre os novos temas que certamente surgirão durante a caminhada.

Referências

ANTON, Howard. Cálculo. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2007. 2 v. : il., gráfs., tabs., fots. ; 28 cm

BARALDO, Bruno Pimentel Franceschi. Análise de produções de alunos da Turma Especial de Cálculo IA da UFRGS. 2008. (não publicado)

DUBINSKY, E.; HAREL, G. (1992). The nature of the process conception of function. In: DUBINSKY, E.; HAREL, G (Eds.), **The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy**. *MAA Notes*, The Mathematical Association of America, *25*, p. 85-106.

PALIS, G. Uma análise das construções mentais subjacentes à produção e interpretação de gráficos de funções. In: CARVALHO, L.M.; GUIMARÃES, L.C, orgs. **História e tecnologia no ensino da matemática**, v. 1. Rio de Janeiro: IME-UERJ, 2002;

SILVA, Benedito A. Contrato didático. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara et alii. **Educação matemática: uma introdução**. São Paulo: EDUC, 1999.