

EXPLORANDO A FORMA CANÔNICA DA FUNÇÃO QUADRÁTICA POR MEIO DO SOFTWARE WINPLOT: UMA EXPERIÊNCIA COM ALUNOS DO 1º ANO DO ENSINO MÉDIO

GT 02 – Educação Matemática no Ensino Médio e Ensino Superior

Danusa de Lara Bonoto – URI – danusalb@urisantiago.br
Leugim Corteze Romio – URI – leugimcr@bol.com.br
Maria Arlita da Silveira Soares – URI – arlita.s@bol.com.br
Thainã de Sene Abi – URI – thainaabi@yahoo.com.br

Resumo: Este relato apresenta a elaboração e aplicação de atividades em ambiente informatizado, durante a realização da disciplina de Estágio Curricular em Ensino de Matemática I, experiência vivenciada por dois acadêmicos do curso de licenciatura em matemática. Foram elaboradas seqüências de ensino utilizando os princípios de Engenharia Didática e fundamentadas na teoria dos registros de representação semiótica, envolvendo funções reais, sendo aplicadas a alunos de 1º ano de ensino médio de uma escola pública do município de Santiago-RS. Considerando a Matemática, um conhecimento social e historicamente construído pela humanidade que auxilia na compreensão dos fenômenos naturais e no desenvolvimento científico e tecnológico, bem como de outras áreas do conhecimento. Ao desenvolvermos a prática pedagógica, buscamos elaborar seqüências que explorassem a atividade cognitiva da conversão, já que essa atividade é importante para a aprendizagem da matemática e deve ser potencializada pelo professor. Constatamos que o uso do software Winplot agilizou as conversões do registro algébrico para o gráfico e vice-versa, bem como proporcionou aos alunos darem significado as variáveis visuais pertinentes do registro gráfico, ou seja, pontos de intersecção com os eixos, inclinação, concavidade, pontos de máximos e mínimos.

Palavras-Chave: Função Quadrática; WinPlot; Registros de Representação Semiótica; Educação Matemática.

Introdução:

Este relato tem o objetivo de apresentar a experiência vivenciada por dois acadêmicos do curso de licenciatura em matemática durante a realização da disciplina de Estágio Curricular em Ensino de Matemática I, o qual propõe a elaboração e aplicação de atividades em ambiente informatizado. Para isso, foram elaboradas seqüências de ensino, baseadas nos conceitos da Engenharia Didática e fundamentadas na teoria dos registros de representação semiótica, envolvendo funções reais, sendo que estas foram aplicadas a alunos de 1º ano de ensino médio de uma escola pública da cidade de Santiago-RS.

As atividades desenvolveram-se no laboratório de informática da escola, totalizando quinze horas aula, distribuídas em cinco encontros, onde foram utilizados os softwares educacionais, WinPlot, Vrum-Vrum e o Objeto de Aprendizagem do projeto RIVED-Brasil “Potencializando seu conhecimento”.

Optamos pelo estudo de funções devido a dois motivos. O primeiro por se tratar de conteúdo cuja aplicabilidade no dia-a-dia é de suma relevância, podendo ser utilizado, inclusive, de forma interdisciplinar, sendo associado a outras disciplinas, dentre elas física,

biologia... E o segundo, a pedido da professora da turma, por ser o principal conteúdo trabalhado por ela durante o ano letivo.

Além disso, o estudo em sala de aula, geralmente não consegue explorar as várias representações do objeto função, em especial a representação gráfica, bem como não conseguindo explorar suas aplicações de uma maneira mais visível, visto a dificuldade em se manipular gráficos no quadro negro. Assim, essa proposta de ensino vem a favorecer o trabalho do professor no ensino deste conteúdo, possibilitando ao aluno outras formas de compreensão e interpretação.

Dentre as funções trabalhadas durante a prática pedagógica podemos destacar a função quadrática. Em relação a essa função, trabalhamos a sua forma canônica ($f(x) = a(x + m)^2 + n$) por essa forma não ser trabalhada na educação básica. No entanto, proporciona aos alunos a realização de análises gráficas, uma vez que temos uma maior facilidade em relacionar suas variáveis visuais, e compará-las, onde a partir de expressões algébricas podemos determinar os movimentos ocorridos no gráfico, em relação a uma função padrão, no nosso caso, $y = x^2$, em especial com o auxílio de softwares educacionais que plotam gráficos rapidamente.

Dentre as atividades desenvolvidas, relataremos a seqüência de ensino aplicada no 3º e 4º encontros, envolvendo funções de 2º grau na forma canônica, cujo objetivo principal era introduzir a forma canônica da função quadrática, bem como levar o aluno a perceber que modificações na escrita algébrica da função acarretam mudanças na representação gráfica e vice-versa.

As atividades realizadas nos demais encontros foram de grande importância, porém neste relato, apresentaremos apenas as seqüências de ensino do 3º e 4º encontros, para que o relato não se torne muito extenso.

O uso de softwares no ensino e aprendizagem da matemática

A Matemática, um conhecimento social e historicamente construído pela humanidade, auxilia na compreensão dos fenômenos naturais e no desenvolvimento científico e tecnológico, bem como no desenvolvimento de outras áreas do conhecimento, compartilhando linguagens para a representação e sistematização dos conhecimentos dessas áreas. O que pode ser observado em relação ao conceito de função, uma vez que este conceito além de permitir conexões internas à matemática também desempenha:

“... um papel importante para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano,

como de outras áreas do conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia. Cabe, portanto, ao ensino de Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações problema de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática.” (BRASIL, 1999, p. 43)

Por meio da afirmação acima, percebe-se a importância da aquisição do conceito de função por parte do aluno, pois esse permite modelar situações-problema. Para tanto, torna-se necessário que o aluno consiga trabalhar com as várias representações desse conceito, entre elas: gráfica, algébrica, numérica, tabular, língua natural...

Segundo Duval (2003) a aprendizagem de um objeto matemático só ocorre quando os alunos conseguem mobilizar várias representações de um mesmo objeto, pois a diferença da matemática para as demais áreas do conhecimento está no fato do seu objeto ser abstrato e necessitar de várias representações semióticas para acessá-lo. Além disso, em Matemática, para cada objeto existe uma variedade de representações semióticas¹.

Para Duval (apud SOARES, 2007) não há noésis (conceituação) sem semiósis (apreensão ou produção de uma representação semiótica), o que revela a importância de se trabalhar, no ensino de matemática, com as várias representações de um objeto, mas, além disso, é preciso potencializar a coordenação entre as representações semióticas.

Há dois tipos distintos de transformações semióticas, ou seja, o tratamento e a conversão. O tratamento, são mudanças num mesmo registro e a conversão, são mudanças em diferentes registros. Podemos considerar como conversão a transformação do registro algébrico de uma função quadrática para o registro gráfico. Vale destacar que ao invertermos o sentido da conversão não garante que o aluno consiga realizá-lo, pois o custo cognitivo pode ser maior, visto que essa conversão necessita do reconhecimento das variáveis visuais pertinentes a representação gráfica associadas a valores numéricos da representação algébrica.

Duval (apud MARIANI, 2006) afirma que, nas expressões algébricas as variáveis visuais podem ser observadas, por exemplo, nos símbolos de: relações ($<$, $>$, $=$,...); de operação ou sinais ($+$, $-$, ...); de variável; de expoentes, de coeficientes e constantes. Sendo que a alteração destes símbolos provoca modificações nas representações gráficas. Por exemplo, a forma canônica da função quadrática permite ao professor explorar o maior número de variáveis visuais pertinentes que a forma expandida da função quadrática, pois por meio do registro algébrico podemos concluir sobre concavidade, posição do vértice, abertura da parábola, variáveis visuais pertinentes, estas explicitas no quadro abaixo:

¹ Para falar das diversas representações semióticas em matemática, Duval (2003) utiliza o termo Registro de Representação Semiótica.

Variáveis Visuais	Valores	Unidade simbólica correspondente
Concavidade da parábola	Voltada para cima	Parâmetro $a > 0$ (ausência do símbolo -)
	Voltada para baixo	Parâmetro $a < 0$ (presença do símbolo -)
Abertura da parábola	Maior abertura	$0 < a < 1$
	Menor abertura	$ a = 1$ (o parâmetro não está escrito) $ a > 1$
Posição do vértice da parábola com relação ao eixo das abscissas	Acima do eixo	$n > 0$
	Na origem	$n = 0$
	Abaixo do eixo	$n < 0$
Posição do vértice da parábola com relação ao eixo das ordenadas	A esquerda do eixo	$m > 0$
	Na origem	$m = 0$
	A direita do eixo	$m < 0$

Quadro 1 – Variáveis visuais pertinentes da forma canônica
Fonte: Maia (2007, p. 65)

Partindo desses pressupostos elaboramos as seqüências de ensino que serão relatadas a seguir.

Atividades realizadas com os alunos

Para o desenvolvimento da prática pedagógica, buscamos elaborar seqüências que explorassem a atividade cognitiva da conversão, já que essa atividade é importante para a aprendizagem da matemática e deve ser potencializada pelo professor. Cabe destacar que o uso do software Winplot agilizou as conversões no registro algébrico para o gráfico e vice-versa, bem como proporcionou aos alunos darem significado as variáveis visuais pertinentes do registro gráfico, ou seja, pontos de intersecção com os eixos, inclinação, concavidade, pontos de máximos e mínimos.

Além disso, como já comentamos, as seqüências de ensino foram baseadas nos princípios da Engenharia Didática, a qual Douady define como sendo:

(...) uma seqüência de aula(s) concebida(s), organizada(s) e articulada(s) no tempo, de forma coerente, por um professor-engenheiro para realizar um projeto de aprendizagem para uma certa população de alunos. No decurso das trocas entre professor e alunos, o projeto evolui sob as reações dos alunos e em função das escolhas e decisões do professor. (apud MACHADO, 2002, p. 198).

Assim, uma Engenharia Didática é um esquema experimental que tem por objetivo analisar as situações didáticas no espaço da sala de aula e trata das concepções, realizações, observações e análise de seqüências de ensino, organizadas em quatro fases definidas por: análises preliminares, análises a priori, experimentação e análise a posteriori.

Desta forma, para um melhor entendimento de nosso trabalho, apresentamos a seguir as atividades desenvolvidas seguidas de suas análises *a priori* e *a posteriori*.

Seqüência de Ensino 3

Nas atividades iniciais, os alunos deveriam examinar o domínio, a imagem e as coordenadas do vértice de cada função quadrática, constatando que o domínio não se altera, contudo a imagem sofria alterações. Observando os gráficos das curvas do tipo $y = ax^2$,

conforme o valor absoluto do coeficiente a o que altera a concavidade da parábola, $y = x^2 + n$, verifica-se que a adição da constante n faz com que ocorra uma translação vertical do gráfico de $y = x^2$, e $y = (x + m)^2$ onde os alunos podem observar que a adição de uma constante à variável x implica em uma translação horizontal.

Após os alunos realizarem as devidas análises para as atividades mostradas anteriormente, foi feita a socialização das respostas elaboradas pela turma. Nesse momento, institucionalizamos as propriedades dos parâmetros a , n e m . Com as explorações realizadas no software e no quadro, onde se confirmou que a variação do parâmetro a implica na mudança de concavidade e abertura da parábola, sendo que foi necessário relembrar o conceito de módulo no quadro da sala, a fim de poder-se generalizar tal coeficiente. A respeito do parâmetro n , constatou-se que a parábola intercepta o eixo das ordenadas no ponto $(0, n)$, fazendo com que ocorra uma translação vertical da parábola representada por $y = x^2$. Sobre o parâmetro m , conclui-se que a parábola intercepta o eixo das abscissas no ponto $(-m, 0)$. Assim, o valor simétrico de m representa, nos casos estudados, ao mesmo tempo, a raiz da função e a coordenada x do vértice. Deste modo, percebeu-se uma translação horizontal em relação à parábola representada por $y = x^2$:

Ao final da aula, podemos generalizar que, na forma canônica da função de 2º grau $y = a(x + m)^2 + n$, com $a \neq 0$, que o coeficiente a indica a abertura da parábola, e os parâmetros m e n relacionam-se com as coordenadas do vértice dessa parábola: $V(-m, n)$.

Seqüência de Ensino 4

A aula seguinte iniciou-se com uma pequena revisão sobre a função dos parâmetros a , m e n da representação canônica da função do segundo grau, estudados separadamente na aula anterior. De posse dessa explicação, pedimos para que os alunos, sem a utilização do software, analisassem cada uma das funções que estavam na atividade seguinte e explicassem como ficaria o seu gráfico em relação à função de referência $y = x^2$, bem como identificassem as coordenadas do vértice de cada parábola. Primeiramente, esperava-se que os alunos conseguissem descrever o movimento dos gráficos indicando a posição da concavidade da parábola e comparando sua abertura com a função de referência, citando ainda se houve translações horizontais e/ou verticais. Tais movimentos alteravam o vértice da parábola ($V(-m, n)$), ou seja, os alunos deveriam determinar as coordenadas dos vértices de cada função observando apenas a respectiva escrita algébrica.

Após o desenvolvimento da atividade, propôs-se que eles utilizassem o programa para verificar se a resposta estava correta. A seguir, buscamos que os alunos fizessem a conversão da representação da forma geral ($y = ax^2 + bx + c$) para a forma canônica ($y = a(x + m)^2 + n$). Para esse processo os alunos poderiam utilizar dois procedimentos: pelo método de “completar quadrados”, onde possivelmente os alunos encontrariam maiores dificuldades, pois tal método depende da compreensão do conceito de produtos notáveis, ou pelo cálculo das coordenadas x e y do vértice utilizando as fórmulas definidas para tais coordenadas, e a seguir associar $x_v = -m$ e $y_v = n$.

Para essa atividade, esperava-se que os alunos utilizassem a segunda opção (calcular x_v e y_v e associar a m e n), por essa forma ser mais “fácil” e não exigir um maior custo cognitivo, ou seja, eles tinham uma fórmula direta para determinarem as coordenadas do vértice, por ser a forma geralmente trabalhada nas escolas durante o Ensino Médio. Contudo, a maioria dos alunos presentes optou pelo segundo método e, para nossa surpresa, apresentaram um bom rendimento. Ao solicitarmos que representassem as coordenadas do vértice, percebemos que muitos apresentavam dificuldades para representar o ponto, pois escreviam as coordenadas entre colchetes, e não entre parênteses, representando assim um intervalo e não um ponto.

$m = 0$	$v = [0, 0]$	$m = 0$	$v = [0, 0]$
$m = -3$	$v = [0, -3]$	$m = -2$	$v = [-2, 0]$
$m = -4$	$v = [0, -4]$	$m = -1$	$v = [-1, 0]$
$m = 1$	$v = [0, 1]$	$m = 1$	$v = [1, 0]$
$m = 3$	$v = [0, 3]$	$m = 2$	$v = [2, 0]$
$m = 5$	$v = [0, 5]$	$m = 5$	$v = [5, 0]$

Figura 1: Exemplo de representação de ponto incorreta

Concluindo as atividades, propomos o desenho de duas figuras (rostos), onde os alunos deveriam desenhá-las a partir da apreensão dos conceitos de forma canônica e simetria. O objetivo desta atividade final era que os estudantes retomassem o conteúdo apreendido anteriormente, ou seja, alterarem a abertura da concavidade da parábola e realizarem translações horizontais e verticais, com o auxílio dos valores “ a ”, “ m ” e “ n ”.

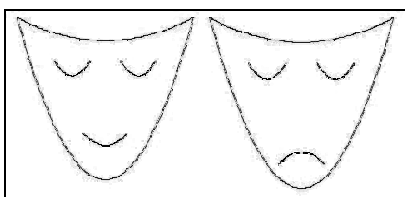


Figura 2: Modelos a serem desenhados
Fonte: Maia, 2006

Os alunos demonstraram ter compreendido as condições necessárias para se variar a abertura das concavidades, bem como para transladar as funções. As maiores dificuldades da atividade se referiram à escolha de funções para os “olhos”, e quanto à verificação dos valores adotados para o travamento de intervalo das funções (determinação do domínio). Acreditamos que os alunos tenham conseguido realizar essa atividade de forma tranqüila pelo fato desta ser semelhante à uma atividade realizada na segunda aula envolvendo funções lineares, bem como por terem compreendido os significados dos parâmetros a , m e n , na forma canônica da função do 2º grau.

Considerações Finais

Percebemos que, o desenvolvimento destas atividades foi favorecido pelo uso dos recursos computacionais, no sentido de estes facilitarem a visualização gráfica das funções quadráticas, possibilitando aos participantes analisarem melhor as implicações entre a representação gráfica e a algébrica de uma função. Além disso, os softwares possibilitam a visualização de vários gráficos simultaneamente, o que favoreceu a compreensão das variáveis envolvidas.

Alguns alunos, entretanto, apresentaram dificuldades para identificar algumas destas variáveis, como o domínio da função quadrática, que permanece inalterado ($D = \mathfrak{R}$), independente da representação algébrica da mesma, sendo que alguns estudantes, inclusive, confundiam o domínio da função com suas raízes/zeros, visto que consideravam, em dados momentos, que o domínio da função era representado apenas pelo intervalo entre as raízes/zeros da função ($D = [x', x'']$). Já a imagem, porém, poderá sofrer alterações quando alteramos sua escrita algébrica, como acontece ao adicionarmos à função as constantes n e m , comentadas anteriormente.

Observamos também que os alunos apresentavam grandes dificuldades em representar o vértice das funções, tanto em relação à representação matemática de ponto quanto à identificação das respectivas coordenadas. Em certos momentos, eles afirmavam que “o vértice é n ”, desconsiderando a coordenada x desse ponto. Na atividade seguinte, de modo semelhante, afirmavam que “o vértice é m ”, desconsiderando a ordenada do ponto. Outro obstáculo constatado em tal situação foi a compreensão, por parte dos alunos, da importância do sinal do parâmetro, no sentido de mostrar o porquê da translação ocorrer em sentido contrário ao sinal utilizado para o coeficiente. Para resolver esse impasse, realizou-se uma explicação sobre as raízes da função, onde os alunos conseguiram perceber porque a função transladava simetricamente ao valor de m .

Desta forma, constatamos que as diferentes representações para o mesmo objeto matemático nem sempre são assimiladas rapidamente pelos alunos, de mesma forma e num mesmo tempo, porém com o auxílio computacional, as conversões entre o registro gráfico e o algébrico, puderam ser realizadas de maneira a obter uma melhor compreensão das variáveis envolvidas.

Além disso, conseguiu-se que os alunos fizessem uso de um terceiro tipo de representação, o da língua natural, no momento em que pedimos que eles descrevessem suas respostas e argumentassem sobre os procedimentos utilizados para resolução, o que a primeiro momento se mostrou difícil, devido a não estarem acostumados com este registro, mas que ao final, já havia uma boa compreensão sobre a importância do uso deste registro.

Referências

- BRASIL, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais. Ensino Médio. Parte III. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília:MEC/SEMTec, 1999.
- DUVAL, R. *Registros de Representação Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática*. In: Machado, Silvia Dias Alcântara (org.). *Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica*- Campinas, São Paulo. Papirus, pp. 11-33, 2003.
- MACHADO, Silvia D. A. 2002. Engenharia Didática. In: Machado, Silvia D. A. *Educação Matemática: uma introdução*. São Paulo. EDUC, pp. 197-208.
- MAIA, D. *Função Quadrática: Um Estudo Didático de uma Abordagem Computacional*. 2007. Dissertação de Mestrado, PUC/SP, 2007.
- MARIANI, R.C.P., SOARES, M. A. S. *Os registros de representação semiótica: contribuições para o ensino de física e matemática*. In: II Jornada Nacional de Educação Matemática e XV Jornada Regional de Educação Matemática, 2008.
- MARIANI, R.C.P. *A transição da Educação Básica para o Ensino Superior: A coordenação de registros de representação e os conhecimentos mobilizados pelos alunos no curso de cálculo*. Tese de doutorado, PUC/SP, 2006.
- SOARES, M. A. S. *Os números racionais e os registros de representação semiótica: análise de planejamentos das séries finais do ensino fundamental*. Dissertação de mestrado, Unijuí, 2007.