# MALHAS COMPUTACIONAIS PARA SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE ESCOAMENTOS DE FLUIDOS ENTRE CILINDROS COM EXCENTRICIDADE

**GT 04 – Modelagem Matemática**

**Ricardo Vargas Del Frari – URI/Erechim – ricardovdf@hotmail.com**
**M.Sc. Clemerson Alberi Pedroso– URI/Erechim – cpedroso@uri.com.br**

**Resumo:** Neste trabalho de iniciação cientifica foi desenvolvido uma rotina computacional capaz de gerar malhas estruturadas em duas dimensões, para cilindros concêntricos e com excentricidade. Estas malhas podem ser utilizadas na simulação numérica de escoamentos de fluidos, tendo como modelo matemático as equações diferenciais parciais de Navier-Stokes e técnicas numéricas, como por exemplo: diferenças finitas, Runge-Kutta e coordenadas generalizadas. Salienta-se que, as equações diferenciais de Navier-Stokes não apresentam solução analítica, restando como alternativa para resolução o uso de técnicas numéricas. A rotina computacional foi implementada através da linguagem de programação Fortran 90 e a visualização das malhas através do software Visual. Atualmente a rotina computacional desenvolvida para gerar malhas as malhas citadas já está sendo utilizada para simulação numérica da convecção natural, mista e forçada, segundo um sistema de equações do tipo Navier-Stokes com aproximação de Boussinesq.

**Palavras-chave:** Matemática Aplicada, Simulações Numéricas, Malhas Computacionais.

## Introdução

A Fluidodinâmica Computacional, bastante conhecida como CFD (*Computational Fluid Dynamics*) é uma área de grande interesse comercial e acadêmico para solução de problemas de aerodinâmica, termodinâmica, hidráulica, entre outros. As pesquisas nesta área podem ser desenvolvidas com base em experimentos em laboratórios, bem como simulações numéricas pelo uso de computadores baseado em modelos matemáticos.

O modelo matemático geralmente é estabelecido com base nas equações de conservação da quantidade de movimento, de massa, de pressão e de temperatura, formando um conjunto de equações diferenciais parciais não-lineares, conhecidas como equações de do tipo Navier-Stokes, que não tem solução analítica. Estas equações, quando submetidas a condições iniciais e de contorno apropriadas, podem representar diferentes situações de escoamentos de fluidos.

A finalidade deste texto é apresentar algumas malhas computacionais para cilindros concêntricos e com excentricidade a partir de rotinas computacionais desenvolvidas na linguagem de programação Fortran 90. Além disso, apresentar um conjunto de equações diferenciais parciais do tipo Navier-Stokes, na sua forma adimensional, com a aproximação de Boussinesq, que são utilizadas para simulação numérica de escoamentos laminares de fluidos Newtonianos por convecção natural, mista e forçada.

**Malhas Computacionais**

Uma malha computacional é constituída por linhas e pontos, os pontos são considerados onde essas linhas se interceptam e servem de orientação para o cálculo de propriedades físicas baseado num modelo matemático. Uma malha computacional nada mais é que uma representação ou a "discretização" do plano físico utilizado na simulação numérica. A solução de um sistema de equações diferenciais (modelo matemático) pode ser geralmente simples quando empregado uma malha bem construída.

O método mais simples, para se gerar uma malha computacional é fazê-la manualmente, desenhando a geometria que se deseja discretizar numa folha de papel milimetrado, identificando as coordenadas de cada ponto formado pela intersecção de várias linhas que representam toda região da geometria desejada. Essas coordenadas então são informadas ao computador, que automaticamente são lidas formando a malha computacional da geometria (MALISKA, 1995).

Ainda segundo Maliska (1995) há outros métodos classificados como automáticos, para se gerar malhas computacionais: os algébricos e os diferenciais.

> Os algébricos empregam diferentes tipos de interpolações e são bastante versáteis e rápidos. Os diferenciais, assim chamados por empregarem equações diferenciais, são mais gerais, mas, em contrapartida, apresentam tempo de computação sensivelmente maior e uma maior elaboração matemática. (MALISKA, 1995, p. 253).

Quanto à classificação das malhas, uma malha dita estruturada é quando cada volume interno tem sempre o mesmo número de vizinhos e a numeração dos mesmos tem uma seqüência natural. E quando se diz que uma malha é não-estruturada, temos o número de vizinhos variando de volume para volume, ficando difícil estabelecer uma regra de ordenação (BORTOLI, 2000).

A figura 1 representa a situação que se quer representar através duma malha computacional, de um cilindro interno com raio $r_i$ e temperatura $T_i$, e outro externo de raio $r_e$ e temperatura $T_e$. É na região entre os dois cilindros que o escoamento de fluido por convecção será simulado numericamente.

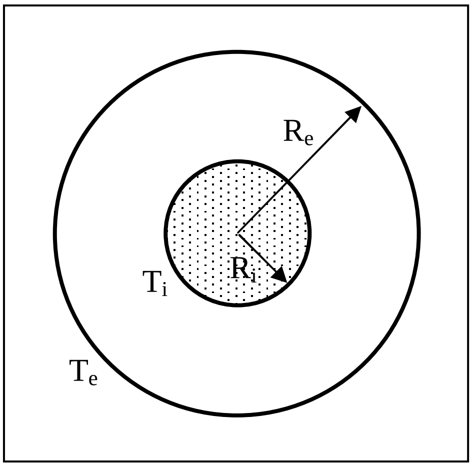
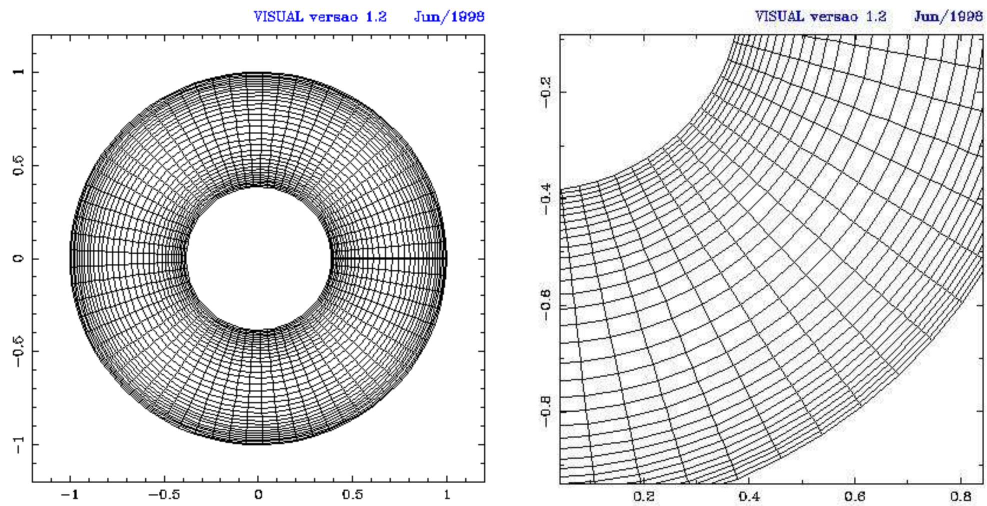



**Figura 1 –** Representação da situação física a ser representada por uma malha computacional.

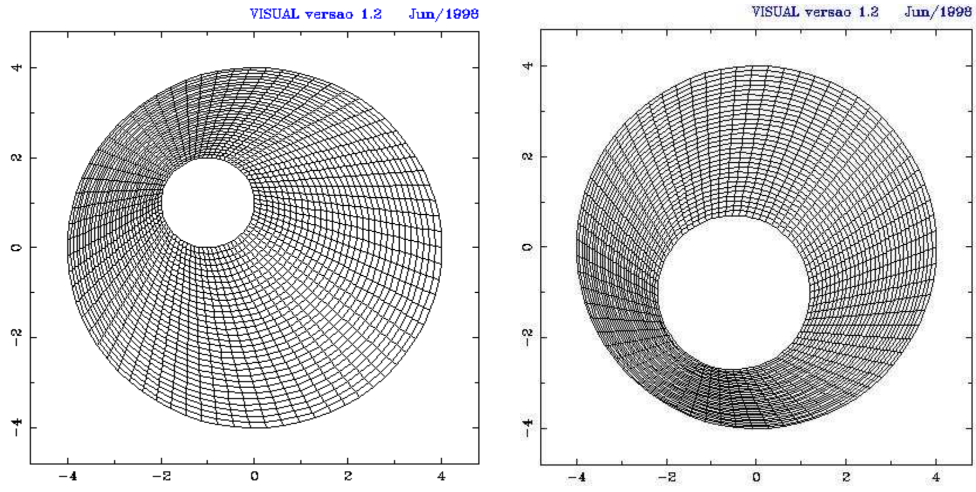
As figuras 2 (a) e (b) representam uma malha computacional estruturada para dois cilindros concêntricos de 34 por 70 pontos, respectivamente ao longo do raio e angularmente, com refinamento nas paredes. Justifica-se o refinamento pela necessidade de melhor captação das variações das propriedades física (temperatura, pressão e velocidade) do escoamento nas proximidades das paredes dos cilindros.




(a) (b)

**Figura 2 –** Malha computacional de 34 (radialmente) por 70 (angularmente) pontos (a) e zoom da malha computacional (b).

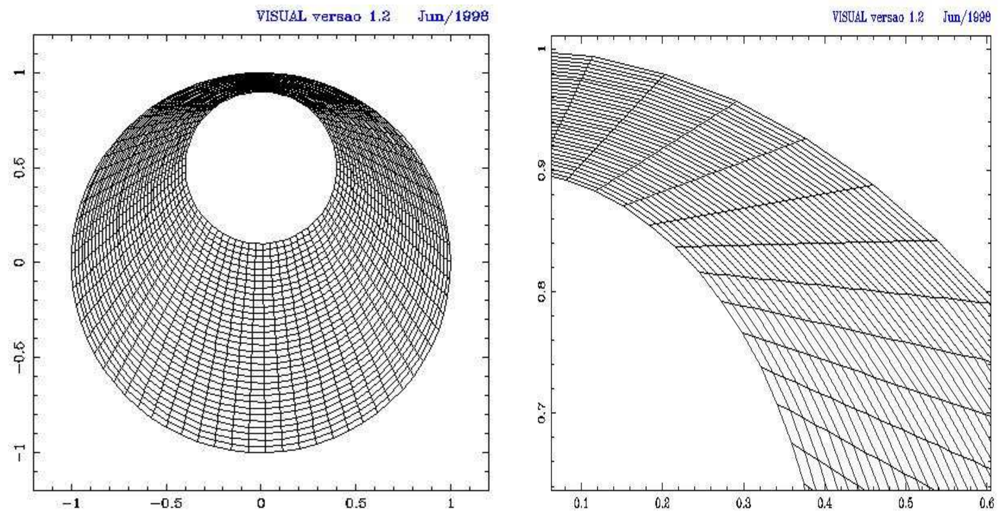
As figuras 3 (a) e (b) representam duas malhas com diferentes excentricidades, 1,41 e 1,11, respectivamente. Note que, o comprimento dos raios dos cilindros internos também são diferentes, entretanto, o número de pontos é o mesmo para ambas as malhas 34 por 70 pontos.




(a) (b)

**Figura 3 –** Malhas para cilindros com excentricidade de 34 (radialmente) por 70 (angularmente) pontos com excentricidade de 1,41 (a) e 1,11 (b).

As figuras 4 (a) e (b) representam uma malha sem refinamento nas proximidades das paredes dos cilindros para o caso em que a excentricidade entre os cilindros é 0,8, também, com 34 por 70 pontos, além do detalhe da região mais estreita por onde o fluido deverá "passar".




(a) (b)

**Figura 4 –** Malha para cilindros de 34 (radialmente) por 70 (angularmente) pontos com excentricidade de 0,8 (a) e parte da região mais estreita (b).

As malhas computacionais aqui apresentadas pelas figuras 2, 3 e 4, foram obtidas de forma algébrica através de rotinas computacionais desenvolvidas na linguagem de programação Fortran 90, que consideram a localização de todos os pontos que representam a região entre os cilindros interno e externo. As linhas apresentadas pelas figuras foram obtidas por uma interpolação linear por cálculos de distâncias e ângulos específicos.

**Modelo Matemático**

O modelo matemático do tipo Navier-Stokes na forma adimensional utilizado para simulações numéricas de escoamentos de fluidos com convecção, é constituído de uma equação para a quantidade de movimento na direção x, uma equação para a quantidade de movimento na direção y, com a aproximação de Boussinesq, uma equação do tipo Poisson para a pressão e uma equação para a temperatura, respectivamente, representadas pelas equações (1), (2), (3) e (4) (BEJAN, 1996; MUNSON, 2004).

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial (uu)}{\partial x}+\frac{\partial (vu)}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial (uv)}{\partial x}+\frac{\partial (vv)}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)-\frac{Ra}{Pr}\frac{1}{Re^2}T \tag{2}$$

$$\nabla^2 p=\frac{\partial D}{\partial t}+\frac{\partial^2 uu}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 vv}{\partial y^2}+2\left(\frac{\partial^2 uv}{\partial x\partial y}\right)+\frac{1}{Re}\left\{\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 D}{\partial y^2}\right\} \tag{3}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=\frac{1}{Pr\,Re}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) \tag{4}$$

Sendo: “u” o vetor velocidade na direção do eixo x; “v” o vetor velocidade na direção do eixo y; “t” a variável temporal; “p” o vetor da pressão; “T” o vetor da temperatura; “Ra” o parâmetro adimensional de Rayleigh; “Re” o parâmetro adimensional de Reynolds; “Pr” o parâmetro adimensional de Prandtl e o termo “D” igual a $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}$, provindo da equação da conservação da massa.

O parâmetro adimensional de Reynolds, sem dúvida, é o parâmetro adimensional mais famoso da mecânica dos fluidos. O engenheiro Osborne Reynolds demonstrou, pela primeira vez, que a combinação de variáveis podia ser utilizada como critérios para a distinção entre escoamento laminar e turbulento. Escoamentos com “grandes” números de Reynolds em geral são turbulentos e aqueles em que as forças de inércia são “pequenas” em comparação com as forças viscosas são caracteristicamente escoamentos laminares. Para o caso de um fluxo de água num tubo cilíndrico, admitem-se os valores de 2.000 e 3.000 como limites. Dessa forma, para valores menores que 2.000 o fluxo será laminar e para valores maiores que 3.000 o fluxo será turbulento. Entre estes dois valores o fluxo é considerado como de transição.

O parâmetro de Prandtl, esta relacionado às propriedades do fluido, no que se refere à distribuição de temperatura e à distribuição de velocidade para o escoamento sobre uma placa plana. Os metais líquidos possuem geralmente uma condutividade térmica alta e um calor específico pequeno. Portanto, seus números de Prandtl são pequenos, variando de 0,005 a 0,01, se tomarmos os gases como referencia esse varia de 0,6 a 1,0. A maioria dos óleos, por outro lado, possuem número de Prandtl elevados, alguns até 5.000 ou mais, pois sua viscosidade é grande a baixas temperaturas, e sua condutividade térmica pequena (KREITH, 2003; FOX, 1995). Já o parâmetro adimensional chamado de número de Rayleigh mede as forças de empuxo e viscosidade de um fluido, ou seja, representa a amplitude de suas convecções térmicas.

A aproximação de Boussinesq, termo que aparece na equação (2) da quantidade de movimento na direção *y*, expressa o acoplamento entre o campo de temperatura e o campo de velocidade (escoamento). Esta definição é válida para casos de escoamentos em que o gradiente de temperatura é pequeno, ou seja, naqueles em que a diferença de temperatura implica em pequena ou nula compressibilidade do fluido. Com o uso da aproximação de Boussinesq pode-se caracterizar os diferentes tipos de convecções se o quociente dos parâmetros adimensionais $\frac{\mathrm{Ra}}{\mathrm{Pr}}\frac{1}{\mathrm{Re}^2}$ for muito maior que um (1,0) trata-se de um escoamento por convecção natural, se for aproximadamente um (1,0) convecção mista e se muito menor que um (1,0) convecção forçada (BEJAN, 1996; INCROPERA, 1992)

## Considerações Finais

Segundo Maliska (1995) atualmente as indústrias já utilizam o computador em larga escala, inclusive revolucionando projetos em detalhes, já que a simulação numérica permite executar muitas experiências rapidamente a um baixo custo. A convecção é um fenômeno de grande interesse comercial e acadêmico, os problemas de convecção forçada e natural têm sido bastante estudados, vários trabalhos são encontrados em livros e artigos da área.

Neste trabalho, foram desenvolvidas malhas computacionais geradas por rotinas computacionais próprias, desenvolvidas na linguagem de programação FORTRAN 90, para simulação numérica da convecção baseado nas equações diferenciais do tipo Navier-Stokes, entre cilindros concêntricos e com excentricidade.

O modelo matemático estudado considera as equações na forma adimensional, permitindo que as simulações numéricas obtidas possam ser validadas segundo comparações com situações reais, desde que a condição de similaridade seja satisfeita, (OBERKAMPF, 1998) torna-se útil o emprego do modelo matemático considerado na forma adimensional.

Um fator fundamental da adimensionalização das equações são os parâmetros adimensionais que podem ser obtidos pelo método da análise dimensional ou diretamente das equações diferenciais, os mesmos podem ser descritos como uma relação algébrica entre as dimensões de propriedades físicas e as grandezas envolvidas. Os parâmetros adimensionais permitem a simulação similar às condições reais do fenômeno em questão (FOX, 1995).

As rotinas computacionais desenvolvidas em Fortran 90, que geram as malhas apresentadas neste texto, bem como, o sistema de equações diferenciais já estão sendo utilizadas para simulação numérica de diferentes tipos de escoamentos por convecção, baseado em técnicas numéricas de resolução: diferenças-finitas, relaxações sucessiva, Runge-Kutta de três estágios e coordenadas generalizadas. Os resultados obtidos tem se aproximado satisfatoriamente aos apresentados por Ming-I (1998) que utiliza técnicas numéricas diferentes das citadas, volumes-finitos e métodos espectrais, das usadas.

## Referências

BEJAN, A.; **Transferência de calor.** São Paulo: Ed. Edgard Blücher, 1996.

CUNHA, M.C.C.; **Métodos Numéricos.** 2 ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2000.

BORTOLI, Á.L.; **Introdução à Dinâmica de Fluidos Computacional.** Porto Alegre: Ed. Universidade/UFRGS, 2000.

FOX, R.W.; McDONALD, A.T.; **Introdução à Mecânica dos Fluidos.** 4 ed. Rio de Janeiro: Ed. LTC, 1995.

INCROPERA, F. P.; DeWITT, D. P.; **Fundamentos de Transferência de Calor e Massa.** 3 ed. Rio de Janeiro: Editora Guanabara Koogan S.A., 1992.

MALISKA, C. R.; **Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional.** Rio de Janeiro: Ed. LTC – Livros Técnicos e Científicos, 1995.

MING-I, C.; HSU, Y.-H.; **Computation of Buoyancy-Driven Flow in an Eccentric Centrifugal Annulus With a Non-Orthogonal Collocated Finite Volume Algorithm.** International Journal for Numerical Methods in Fluids. v.26, p. 323-343, 1998.

MUNSON, B. R.; YOUNG, D.F.; OKIISHI, T.H.; **Fundamentos da Mecânica dos Fluidos.** 4 ed., São Paulo: Ed. Edgard Blücher, 2004.

PEDROSO, C. A. Simulação Numérica de Fluxos Bidimensionais,Laminares e Incompressíveis entre Superfícies Móveis. jan. 2001. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) – PPGMAp/UFRGS, Porto Alegre, 2001.