

GEOMETRIA FRACTAL E ENSINO DE MATEMÁTICA

GT 01 – Educação Matemática nos Anos Iniciais e Ensino Fundamental

Catiana Inês Niedermeyer – UNISC – catiananiedermeyer@hotmail.com

Catiane Koefender – UNISC – cati_koefender@hotmail.com

Dra. Liane Teresinha Wendling Roos - lroos@unisc.br

Resumo: De modo geral, o ensino de Matemática segue sempre a mesma rotina, aulas desmotivadas e sem muitas inovações, principalmente no que se refere aos conhecimentos novos com base em resultados de pesquisas realizadas no campo da Educação Matemática. Com o intuito de mostrar que é possível tornar as aulas de Matemática, mais prazerosas e motivadoras, desenvolveu-se um trabalho de investigação, com uma turma de alunos de 8ª série do ensino fundamental, explorando um conhecimento extremamente novo e, de certa forma, pouco conhecido e usado em sala de aula por educadores matemáticos: a geometria fractal. Conhecer e compreender fractais, presentes no cotidiano do aluno, pode tornar mais fácil a associação do conhecimento geométrico com diferentes conceitos matemáticos, o que, por sua vez, contribui para melhorar a aprendizagem matemática.

Palavras-chave: Geometria Fractal, ensino de matemática, conceitos matemáticos, aprendizagem matemática.

Introdução

Atualmente, todas as áreas do conhecimento vêm passando por transformações, inclusive a Matemática. Desta forma, é importante que futuros professores de matemática, pesquisem a diversidade e os avanços que esta área apresenta, para que o educando tenha acesso a essa forma de conhecimento em sala de aula, de modo que a disciplina de matemática possa lhe trazer maior prazer, motivação e interesse.

Para tornar as aulas de matemática motivadoras e prazerosas é importante que o professor apresente os conteúdos de forma inovadora, através de situações que encantem e que estejam ligadas ao contexto do aluno. Com este objetivo, foi desenvolvida uma pesquisa com alunos de 8ª série do ensino fundamental de uma escola pública localizada em Venâncio Aires/RS. A pesquisa realizada é um requisito da disciplina de Pesquisa no Ensino de Matemática – do Curso de Licenciatura da Universidade de Santa Cruz do Sul – UNISC. A temática desenvolvida foi “Geometria Fractal e Ensino de Matemática”. Este tema traz consigo prazeres oriundos de várias formas de pensar, visualizar e compreender a realidade que rodeia o educando em seu cotidiano.

Inicialmente, realizamos um estudo teórico, visando aprofundar o conhecimento sobre Geometria Fractal. Porém, percebemos que isso somente seria possível se antes de tudo, voltássemos nosso olhar também para a Geometria Euclidiana, visto que muitos fenômenos e formas encontradas na natureza (principalmente os objetos que o próprio homem criou)

podem ser explicados através de conceitos geométricos. Se, por um lado, a Geometria Euclidiana, geralmente é vista como um conteúdo de difícil compreensão pela maioria dos educandos; por outro, nem sempre os educadores matemáticos conseguem associá-la a fatos presenciais, ao contexto do educando.

No segundo momento, quando os objetivos da pesquisa já estavam claros, iniciamos a pesquisa de campo; ou seja, o trabalho com os alunos em sala de aula.

Para finalizar o trabalho em sala de aula, foi realizada uma avaliação, em forma de questionário, com os alunos da 8ª série, sujeitos da pesquisa, tendo o propósito de averiguar se, ao trabalhar conteúdos matemáticos, de forma inovadora, relacionados ao contexto do aluno, haverá maior motivação e prazer nas aulas de matemática.

A Geometria Euclidiana

Geometria Euclidiana é uma área da Matemática que estuda as formas geométricas definidas e indefinidas, bem como suas propriedades. É uma das mais belas áreas da Matemática, pois além de auxiliar na compreensão das coisas do mundo concreto, possibilita construir conceitos matemáticos relacionados a esta área do conhecimento.

Há concordância entre vários autores que ela tenha surgido no Antigo Egito, no vale do rio Nilo. Em decorrência das cheias do rio, os faraós se obrigaram a nomear funcionários, agrimensores para restabelecer fronteiras entre as diversas propriedades que eram atingidas pelas cheias. Assim acaba de surgir a palavra Geometria (do grego *geo* = terra + *metria* = medida, ou seja, “medir terra”). Os egípcios além de usar a Geometria na agricultura (irrigação, obras de defesa contra inundações, etc), também a usavam na engenharia (construção de pirâmides, casas, etc).

Surgimento das unidades de medidas

É impossível falar de Geometria sem falar também do surgimento das unidades de medidas de espaço, massa e volume, que foram incorporadas as nossas vidas, sendo que hoje é impossível se imaginar no mundo sem usá-las. Estão presentes em nossa vida diariamente, como por exemplo, nas compras do supermercado, nas reformas de casas, etc.

Na antiguidade, cada povo tinha seu próprio sistema de medidas, o que causava muito transtorno, pois estes padrões raramente eram precisos. Em 1789, com a Revolução Francesa, surge a idéia de se criar um modelo de unidade que fosse universal, prático e exato. Isso ocorreu somente pelo fato do rompimento das tradições feudais e absolutistas, pois

anteriormente o imperador francês Carlos Magno (768-814), no século VIII, já pensou em unificar as unidades de medida, mas o seu sonho foi derrotado.

A definição do metro como padrão constante universal e seus múltiplos e submúltiplos, foi de extrema importância, pois numa transação econômica a precisão é de extrema importância para considerar o lucro e ganho que cada um pode obter ao realizá-la. Essa padronização não ocorreu de uma hora para outra. A Academia Francesa de Ciência se dedicaram a elaborar um sistema de unidade baseado num padrão da natureza, pois esta não pertence a ninguém.

Os padrões de massa e volume foram calculados a partir do momento seguindo o mesmo princípio. O grama foi definido com a massa de um centímetro cúbico de água pura a 4°C, temperatura em que atinge maior densidade. O litro passou a equivaler o volume de um cubo de 10 centímetros de lado (VOMERO, 2003, p. 42).

O Brasil adotou o sistema métrico decimal em 1862 e o Instituto Nacional de Metrologia, Normalização e Qualidade Industrial (INMETRO) é o órgão responsável pela manutenção dos padrões do sistema internacional de unidades. Já os Institutos de Peso e Medida (IPEM) estão ligados ao INMETRO, são os órgãos estaduais que fiscalizam o comprimento da legislação sobre metrologia.

No nosso país, se torna ilegal vender produtos mesmo que sejam importados em unidades que pertençam ao sistema internacional.

Até o século XX, somente se pensava em trabalhar com objetos geométricos definidos (cones, esferas, cilindros, entre outros), ou seja, se trabalhava muito em cima das coisas ditas perfeitas, coisas criadas pelo próprio homem. Muitos destes objetos são encontrados na natureza, como é o caso da colméia, que apresenta alvéolos hexagonais perfeitos.

Para descrever objetos e formas geométricas usamos a Geometria Euclidiana, porém ela não é suficiente para descrever todas as formas e objetos geométricos encontradas na natureza, como podemos visualizar na figura 1; entre outros exemplos, temos a couve-flor, o cupinzeiro, o brócolis e a própria costa da Grã-Bretanha.

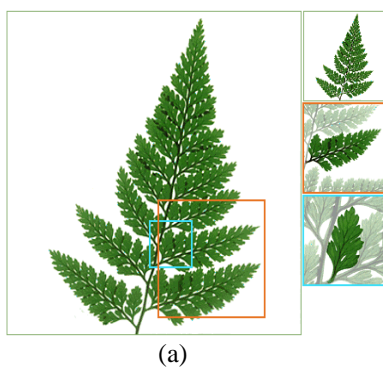


Figura 1. Geometria fractal presente na natureza, numa samambaia (a) e num relâmpago (b).

Geometria Fractal

Foi da necessidade de se calcular e descrever certos fenômenos da natureza ou objetos intrincados que não possuem forma definida, que surgiu a Geometria Fractal, uma geometria que apresenta estruturas geometricamente complexas e infinitamente variadas. Sua nomenclatura se origina do adjetivo em latim *fractus*. O verbo latino corresponde *frangere* que significa “quebrado” ou “fraturado”: criar fragmentos irregulares. Caracterizam-se por repetir um determinado padrão com ligeiras e constantes variações. Como consequência dessa auto-similaridade, as diferentes partes de um fractal se mostram similares ao todo. Assim, os fractais têm cópias aproximadas de si em seu interior.

Ainda segundo Moreira (1999), citado por Nicoline (2005, p.5) diz que “os fractais são conjuntos cuja forma é extremamente irregular ou fragmentada e que têm essencialmente a mesma estrutura em todas as escalas”. Porém somente há poucos anos, com o desenvolvimento e aperfeiçoamento dos computadores, a Geometria Fractal vem se consolidando.

O matemático francês, Benoit Mandelbrot, (1924-), escolheu a palavra fractal para nomear os estudos que ele se dedicou e trouxe mais conhecimento a nós. Pois na verdade os fractais não foram descobertos nem criados por Mandelbrot, ele apenas os nomeou, visto que estes já eram conhecidos antes de sua descoberta. Existem indicações de que os fractais já existiam antes do século XX. Na época eram conhecidos como “monstros matemáticos”, na Grécia Homérica, Índia e China. Até mesmo Euclides, a mais de dois mil anos, observou que a areia da praia se assemelhava a uma espécie que é bidimensional, embora fosse constituída por pequenas partes tridimensional.

Mandelbrot ao definir os fractais se apoiou muito em matemáticos, cientistas, que já haviam se dedicado a este estudo sistemático dos fractais, mas não chegaram a ter uma conclusão exata dos seus estudos. Podemos citar: o Georg Cantor (1845-1918), David Hilbert

(1862-1943), Giuseppe Peano (1858-1932), Helge von Koch (1870-1924), Waclaw Sierpinski (1882-1969), entre outros.

Um fractal apresenta as seguintes características:

- Auto-semelhança ou auto-similaridade.
- Dimensão fracionária ou não-inteira, ou seja, a dimensão fractal representa o grau de irregularidade do objeto e o espaço que ele ocupa em dimensões euclidianas.
- Irregularidade no sentido de “não-suavidade” ou fragmentação.
- Geração por processos iterativos ou a partir de algoritmos (repetições de regras).

A propriedade mais notável dessas formas “fractais” é que seus padrões característicos, sua repetição encontrada em escala descendente, de modo que suas partes, em qualquer escala, são na forma, semelhantes ao todo e subdividindo indefinidamente em partes. Segundo Capra (2004 p.118), Benoit Mandelbrot matemático polonês contemporâneo, que desenvolveu a noção de fractal, ilustra a propriedade da “auto-similaridade”, arrancando um pedaço de uma couve-flor. Ele repete a demonstração dividindo ainda mais esse pedaço. Desse modo, cada parte se parece com a hortaliça inteira. A forma do todo é semelhante a si mesma em todos os níveis de escala (MORAIS, 2007, p. 10).

Os fractais que surgem por meio dos computadores são belos, fascinantes e possuem uma infinita estrutura e complexidade, chamando a atenção das pessoas pela sua estética, sendo assim reconhecido até pelo mundo das artes.

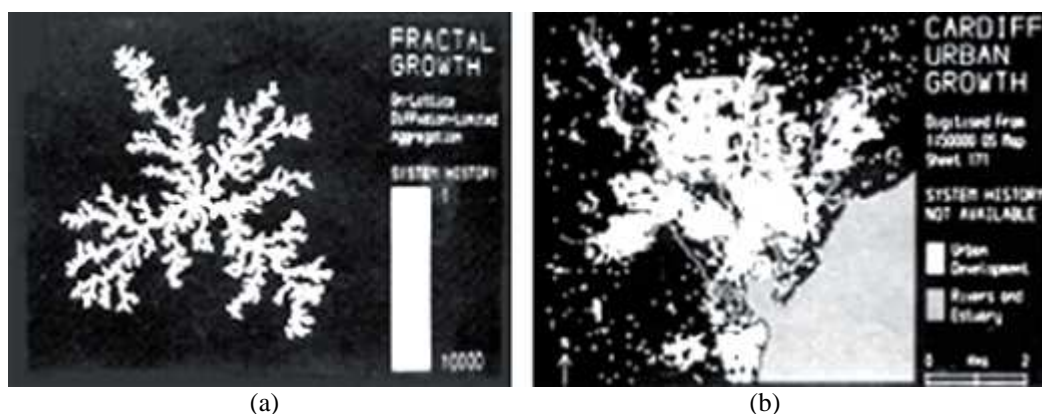


Figura 2. Geometria fractal aplicada à modelos (b) de crescimento urbano das cidades por mapas (a).
Fonte: Martins e Librantz, 2006.

Os fractais além de serem usados nas artes, podem ser também encontrados na música, cinema e em outras áreas de estudo como na Arquitetura e Urbanismo, conforme pode ser visualizado na figura 2, Física, Biologia, Astronomia etc.

Depois de compreender o que são fractais, fica mais fácil trabalhar com eles em sala de aula, pois estão presentes diariamente em nossa vida. Por este fato são chamados também de Geometria da Natureza, pois nela os fractais são facilmente encontrados.

Pesquisa de campo: ações desenvolvidos com alunos de 8ª série do ensino fundamental

Os fractais podem ser explorados no desenvolvimento de diversos conteúdos; como na álgebra, geometria, cálculo, modelagem matemática e números complexos, com o propósito de despertar o interesse dos educandos, pelas formas, cores e luminosidade que os mesmos apresentam ao serem criados no computador e por se trabalhar com recursos audiovisuais.

Para desenvolver a pesquisa, com os alunos da 8ª série, foram realizados três encontros de duas horas/aula cada encontro. Inicialmente foi feita uma revisão do conteúdo de geometria plana e espacial. Foram explorados, também unidades de medidas padrões, tanto da geometria espacial quanto da plana. Construimos com os educandos triângulos equiláteros, sendo que posteriormente, foi construído com eles o caleidoscópio; uma forma de levar os educandos a perceberem o conceito de fractal.

Num segundo momento, construimos com os alunos o Triângulo de Sierpinski (figura 3). Para construir esse triângulo, inicia-se ligando os pontos médios de cada lado do triângulo. Na seguinte etapa, analisamos, com os alunos o que acontece a medida que as iterações da construção do Triângulo de Sierpinski são realizadas. Assim, por exemplo, foram exploradas: a potenciação, a relação de área (para isso foi usado o sistema fracionário) e a relação perímetro e área de cada iteração no Triângulo de Sierpinski. Também onstruimos com os alunos a fórmula geral para a contagem, para o perímetro e também para a área. A fórmula

geral da contagem é 3^{n-1} , a fórmula geral da área é $\frac{1}{3^{n-1}}$ e a fórmula geral do perímetro é $\frac{3}{2^{n-1}}$:

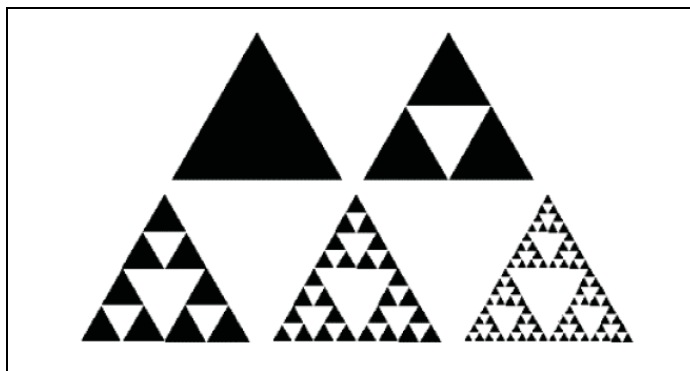


Figura 3 – Triângulo de Sierpinski

Para analisar resultados do trabalho realizado e verificar se ao explorar a Geometria Fractal em sala de aula os objetivos da pesquisa foram alcançados, foi aplicado um questionário com todos os alunos da 8ª série, onde foi desenvolvida a pesquisa.

No questionário pudemos explorar o crescimento dos educandos, com relação ao conhecimento de geometria fractal. Nós percebemos que a definição que ficou para eles é “algo que quando tiramos um pedaço ele será semelhante ao todo”.

Também questionamos se a aplicação do projeto trouxe uma nova visão da disciplina de matemática. Abaixo segue algumas das respostas dos alunos:

- *Sim, porque percebi que a matemática está em toda parte*
- Sim, pois percebi que a matemática é mais simples do que parece
- Sim, porque cada vez que aprendemos coisas novas na matemática saberemos coisas novas para a vida
- Sim, ficou mais fácil de entender a matemática

Quando eles foram questionados sobre o que acharam do projeto desenvolvido e o que ele mudou na aprendizagem, eis as respostas:

- Achei o trabalho interessante, e tenho certeza que vou usar o conteúdo muito na minha aprendizagem.
- Muito bom, descobri novas coisas sobre matemática.
- Muito legal, consegui desenvolver mais fácil a geometria, passei a entender melhor.
- Muito bom, mudou várias coisas, algumas coisas para o futuro, por exemplo algo que ocupa espaço.

Com estas respostas podemos constatar que o projeto teve uma ótima aceitação por parte dos alunos e que com as constantes pesquisas, o tema Fractal é de grande auxílio na vida dos alunos.

Terminamos com a alegria de saber que alcançamos plenamente os objetivos deste projeto.

Considerações Finais

O ensino, especialmente de Matemática, deve ter nuances inovadoras e observar o meio circundante e considerar a realidade do aluno. Colocando-se os conhecimentos aqui apresentados em prática, associando-os aos conteúdos a serem trabalhados, com exemplos que a natureza nos oferece, a Matemática pode apresentar significativas percepções aos educandos. O conhecimento de fractais pode ser trabalhado em qualquer nível de ensino e traz consigo diversão, criatividade, raciocínio lógico, motivação e prazeres pelas belas formas que podem apresentar.

O trabalho desenvolvido, em sala de aula, com alunos de 8ª série, sujeitos da pesquisa, leva-nos a fazer as seguintes afirmações:

➤ Trabalhar conteúdos a partir de exemplos encontrados na natureza estimula a criatividade, o raciocínio lógico, motiva o educando e o auxilia na compreensão de conteúdos e conceitos matemáticos;

➤ Deixar de usar somente quadro, giz e livro didático, em detrimento do uso de recursos audiovisuais (computador, projeção audiovisual, lâminas), faz com que o educando se concentre mais e visualize melhor as situações apresentadas;

➤ A Geometria Fractal pode ser trabalhada em qualquer nível de ensino, pois ela vai de uma simples dobradura de papel até os entes matemáticos modernos, que envolve números complexos, modelagem, etc.

➤ De modo geral, se por um lado, alunos que estão desmotivados, que conversam e não conseguem se concentrar nas aulas de Matemática e que apresentam problemas de aprendizagem; por outro, apresentam grande capacidade de raciocínio, quando conseguem visualizar as coisas através de exemplos encontrados no seu cotidiano.

Finalmente, temos certeza de que é muito importante o envolvimento de futuros professores de matemática com a pesquisa; principalmente se a mesma for desenvolvida em contextos escolares. Particularmente, a realização desta pesquisa, exigiu de nós a busca pelo novo, por conhecimentos que ainda não dominávamos e, ao mesmo tempo nos deu a certeza da importância de trabalhar com alunos, em sala de aula, conteúdos atuais e reais, de forma que os mesmos percebam a beleza e a importância da matemática em situações do seu cotidiano.

Referências

BARBOSA, Ruy Madsen. *Descobrendo a Geometria Fractal para a sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

D'AMBROSIO, Ubiratan. *Educação Matemática: da teoria à prática*. Campinas: Papirus, 1996.

FIGUEIRA, Mara. Passaporte para um mundo multicolorido. *Revista Ciência Hoje para Crianças*, São Paulo n.163, p. 9-11, nov.2005.

MORAES, Cláucia Cabral. *A Geometria dos Fractais Aplicada na 6ª Série do Ensino Fundamental*. 2007. 90f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Desenvolvimento Regional) – Universidade de Santa Cruz do Sul, Santa Cruz do Sul, 2007.

MARTINS, A. M. S. M.; LIBRANTZ, A. F. H. A geometria fractal e suas aplicação em arquitetura e urbanismo. *Revista Exacta*, São Paulo, v. 4, n. especial, p. 91-93, nov. 2006.

NICOLINE, C. A. H. Construindo uma proposta de Geometria Fractal para o ensino fundamental. In: III CONGRESSO INTERNACIONAL DE ENSINO DA MATEMÁTICA, 3., 2005, Canoas. *Anais...* Canoas: ULBRA, 2005. p. 1-6. CD-ROM.

PAIVA, Manoel. *Componente curricular: Matemática*. São Paulo: Moderna, 2004.

RICIERI, Aguinaldo Prandini. *Fractais e Caos: A Matemática de Hoje*. São Paulo: Parma, 1990.

VOMERO, Maria Fernanda. Medidas Extremas. *Revista Super Interessante*, São Paulo, n.16, p. 42-44, mar.2003.