GEOMETRIA FRACTAL PARA SALA DE AULA: COMO CALCULAR A COSTA MARÍTIMA DO BRASIL

GT 02 – Educação Matemática no Ensino Médio e Ensino Superior

Regis Alessandro Fuzzo – FECILCAM – regisfuzzo@hotmail.com.br
MSc. Talita Secorum dos Santos – FECILCAM – tsecorun@hotmail.com
MSc. Veridiana Rezende- FECILCAM - rezendeveridiana@gmail.com

Resumo: O presente trabalho teve como foco o tema referente às Geometrias Não-euclidianas, especificamente, a Geometria Fractal que é uma nova maneira de ver e conceber o conhecimento geométrico, além do que, explica muitos problemas do cotidiano que não são resolvidos pela Geometria Euclidiana. A partir das atividades que foram desenvolvidas com professores da rede pública do Estado do Paraná e com futuros professores da Educação Básica no minicurso de Geometrias Não-euclidianas realizado no II Encontro Interdisciplinar de Educação – ENIEDUC na Faculdade Estadual de Ciências e Letras de Campo Mourão – FECILCAM, fez-se uma reflexão, juntamente com os participantes para compreender a importância da prática docente com Geometrias Não-euclidianas, em especial, a Geometria Fractal. Na realização do minicurso, um dos objetivos específicos foi o de mostrar que é possível trabalhar novos saberes dentro de sala de aula, como, por exemplo, a Geometria Fractal. A partir de uma atividade para calcular a costa marítima do Brasil, mostrou-se que esta geometria pode fazer conexões com outras ciências além de ajudar a cobrir algumas deficiências da Geometria Euclidiana. Além disso, a Geometria Fractal auxilia tanto a compreensão de fenômenos que ocorrem nos diversos ambientes como mostra a existência de belos fractais, o que leva a descoberta do senso artístico aplicado à construção dos mesmos, juntamente com a percepção e a observação da ordem diante da desordem, causando surpresa. A fundamentação teórico-metodológica das atividades desenvolvidas foi baseada nos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN's, e a motivação veio após examinarmos as Diretrizes Curriculares de Matemática para a Educação Básica do Estado do Paraná (DCE). As DCE trazem o conteúdo estruturante geometrias se desdobrando em quatro conteúdos específicos entre eles noções básicas de Geometria Não-euclidianas. Mas o que acontecesse é que grande parte dos professores desconhece sobre a existência de tal geometria, não sabendo assim como trabalhar em sala de aula. Por conta disso, deu-se importância em realizar o minicurso para apresentar aos professores e futuros professores que participaram do evento uma rica atividade fractal. Tal atividade além de trabalhar com a Geometria Fractal se propunha também trabalhar conceitos de Geometria Euclidiana, progressão geométrica, potências, operações com frações, além da possibilidade de introduzir a idéia de proximidade e, também, a idéia de infinito. Deste modo, este trabalho veio contribuir com muitos professores para uma reflexão sobre a sua prática educativa dentro de sala de aula, percebendo a necessidade de se trabalhar novos saberes escolares como as Geometrias Não-euclidianas, em especial, a Fractal. Baseando-se nisso, foi desenvolvida essa atividade para mostrar que é possível fazer inovações em sala de aula além de ser um recurso alternativo para os professores introduzirem o estudo da Geometria Fractal.

Palavras-chave: Geometria Fractal. Atividade Fractal. Cálculo da Costa do Brasil.

Introdução

A fundamentação teórico-metodológica das atividades desenvolvidas foi baseada no livro Didática da Matemática – Uma análise da influência francesa de Luiz Carlos Pais, no livro de Barbosa, Descobrindo a geometria fractal - para a sala de aula, e no artigo científico Qual o comprimento da costa do Brasil escrito por Xavier. Tradicionalmente, nas escolas, é trabalhada uma geometria apenas com medições, distâncias, cálculos de área e volume, ou seja, geometria plana e espacial, porém, a ciência como um todo está em constante evolução e, talvez, por conta disso, é necessário que sempre estejamos nos atualizando, fugindo um pouco desse tradicionalismo. Mas estamos agora passando por um período denominado transposição dos saberes, em que um saber tido como científico é transformado em um saber escolar.

> Um conteúdo do conhecimento, tendo sido designado como saber a ensinar, sofre então um conjunto de transformações adaptativas que vão torná-lo apto a tomar lugar entre os objetos de ensino. O trabalho que, de um objeto de saber a ensinar faz um objeto de ensino, é chamado de transposição didática. (CHEVALLARD, 1991 apud PAIS, 2002, p. 19)

Para Pais (2002, p.21) "O saber escolar representa o conjunto dos conteúdos previstos na estrutura curricular das várias disciplinas escolares valorizadas no contexto da história da educação."

> Tornar o saber matemático acumulado em saber escolar, passível de ser ensinado/ aprendido, exige que esse conhecimento seja transformado, pois a obra e o pensamento do matemático teórico geralmente são difíceis de serem comunicados diretamente aos alunos. (BRASIL, 1998, p. 36)

Atentos à importância de se introduzir esse novo saber científico, ponderamos também, nas Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN+, o qual apresenta um conjunto de sugestões de práticas educativas e de organização dos currículos complementares e focando, principalmente, em relação aos conteúdos de geometria, nos diz que:

> [...] é especialmente adequado para mostrar diferentes modelos explicativos do espaço e suas formas numa visão sistematizada da Geometria com linguagens e raciocínios diferentes daqueles aprendidos no ensino fundamental com a geometria clássica euclidiana. (BRASIL, 2002, p. 125)

Ao examinamos as Diretrizes Curriculares da Educação Básica Matemática do Estado do Paraná (DCE), ela nos aponta que para o Ensino Fundamental e Médio, "[...] o conteúdo estruturante *geometrias* se desdobra nos seguintes conteúdos: Geometria Plana; Geometria Espacial; Geometria Analítica, e noções básicas de Geometria Não-euclidiana." (PARANÁ, 2008, p.55), ou seja, o aluno deve ter conhecimento mais amplo da geometria, não se fixando apenas na Geometria Euclidiana, mas congregando, também, ao seu saber, noções da Geometria Não-euclidiana.

De forma mais objetiva, as DCE, destacam que:

> "Também, no Ensino Médio, aprofundam-se os estudos das noções de geometrias não-euclidianas ao abordar a geometria dos fractais, geometria hiperbólica e elíptica. Na geometria dos fractais, pode-se explorar: o floco de neve e a curva de Koch; triângulo e tapete de Sierpinski, conduzindo o aluno a refletir e observar o senso estético presente nessas entidades geométricas, estendendo para as suas propriedades [...]" (PARANÁ, 2008, p. 57)

Além disso, devemos nos preocupar, também, com muitos procedimentos cognitivos empregados pelos professores dentro de sala de aula que dificultam a introdução de conceitos geométricos e que em algumas situações poderia ser empregadas idéias de Geometrias Não-euclidianas são impedidas por conta de obstáculos cognitivos relacionados a representações semióticas, como relata Kaleff (2004).

Desse modo, vemos a Geometria dos Fractais como uma nova maneira de ver e conceber o conhecimento geométrico, além do que, explica muitos problemas do cotidiano que não são resolvidos pela geometria euclidiana.

Desenvolvimento

A proposta do mini-curso foi o de atingir professores da rede pública do Estado do Paraná e futuros professores em relação às novas tendências do ensino, principalmente, na área de Geometrias Não-euclidianas.

O trabalho foi iniciado com uma pesquisa histórico bibliográfico cujo tema se voltou para o surgimento das Geometrias Não-euclidianas. Foi apresentada toda a evolução da geometria, partindo de Euclides até na criação de novas geometrias, igualmente consistentes, a partir da negação do quinto postulado de Euclides.

A partir disso, deu-se uma atenção especial a geometria fractal introduzindo a idéia de uma geometria que descreve a natureza de forma mais eficiente do que a tradicional geometria euclidiana.

Assim, foi descrita um pouco da história dos fractais e trazendo algumas definições de Mandelbrot e Falconer a respeito da geometria fractal encontradas em Barbosa (2005). Expôs-se uma definição de Maldelbrot como "Um fractal é uma forma cujas partes se assemelham ao seu todo sob alguns aspectos." e a definição de Falconer, sendo esta, "Um conjunto F é um fractal se, por exemplo: F possui alguma forma de 'auto-similaridade'; a dimensão fractal, definida de alguma forma, é maior que sua dimensão topológica; pode ser expresso de um procedimento recursivo ou iterativo.".

Desse modo, foi exposta a construção de alguns fractais simples gerados por infinitas iterações, como o triângulo de Sierpinski, a curva de Koch, a curva de Peano e, assim, descrevendo algumas características dos fractais como: auto-similaridade, estrutura fina em qualquer escala, lei de formação simples, dimensão e que não pode ser descrita com uma função simples.

Num primeiro momento, perceberam-se algumas dificuldades encontradas por parte dos professores e futuros professores de compreender onde estariam esses “tais fractais” na natureza. Com isso, foram-lhes mostradas diversas imagens de fractais na natureza, como em árvores, folhas, relâmpagos, nuvens e ainda alguns órgãos humanos como pulmão, coração e o nosso sistema nervoso e circulatório.

A partir dessa etapa, atingiu-se um objetivo inicial: os participantes começaram a perceber que a natureza não é tão simples de ser descrita com objetos da geometria euclidiana plana como retas, circunferências, triângulos, quadriláteros e outros.

Para ficar mais clara a idéia de fractais, foram mostrados alguns exemplos onde eles são aplicados como antenas celulares, compactação de imagens, computação gráfica, misturadores fractais, fibras ópticas.

Tendo em mente um pouco da idéia sobre fractais, foi questionado o porquê de se trabalhar a Geometria Fractal em sala de aula e, para isso, Barbosa (2005) nos diz que há conexões com outras ciências, a geometria fractal cobre algumas deficiências da Geometria Euclidiana para a compreensão de fenômenos que nos ocorrem diversos ambientes, assim como a existência de belos fractais e descoberta do senso artístico aplicado a construção dos mesmos, juntamente com a percepção e a observação da ordem diante da desordem causando surpresa.

Baseado nessas concepções propusemos uma atividade para calcular o comprimento da costa marítima do Brasil. Logo, de início, eles perceberam que esta atividade envolvia outra ciência, a geografia.

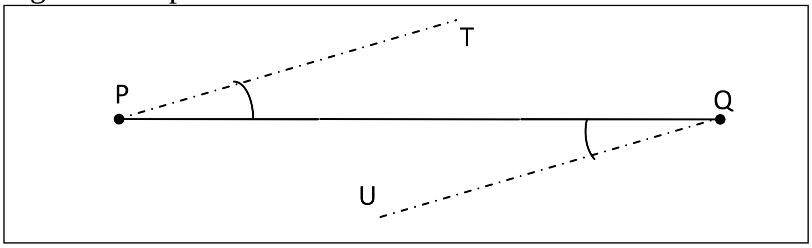
Inicialmente, perguntou-se aos participantes qual era o comprimento da costa e obtiveram-se algumas respostas entre 7000 e 9000 km. Com isso, uma problemática da atividade foi levantada que era motivo de ocorrer essas diferenças de comprimento e não existir uma medida uniforme. Neste momento foi exposto de diversas fontes o comprimento da costa do Brasil, um distinto do outro. Isso incitou a curiosidade e atenção dos professores que se mostraram interessados nesse questionamento.[1] Assim, foi feita uma análise de algumas imagens da costa do Brasil e levantou-se a idéia de que o que separa a terra do mar não é, simplesmente, uma linha como é tradicionalmente ensinado nas escolas.

Dessa maneira foi atingido outro objetivo, os próprios professores e futuros professores constataram que a costa marítima é um fractal. Assim, foi proposta a construção da costa por meio de um fractal, já mencionado anteriormente no decorrer do mini-curso, a curva de Koch, no quadro-negro. Usou-se fita adesiva opaca, trena, régua de comprimento 90 cm, 30 cm, 10 cm e compasso.

Inicialmente, construiu-se um segmento $\overline{PQ}$ com 2,7 m de comprimento fixando a fita adesiva em toda a sua extensão. Assim, dividiu-se o segmento em três partes iguais com auxílio da régua e compasso a partir do seguinte procedimento:

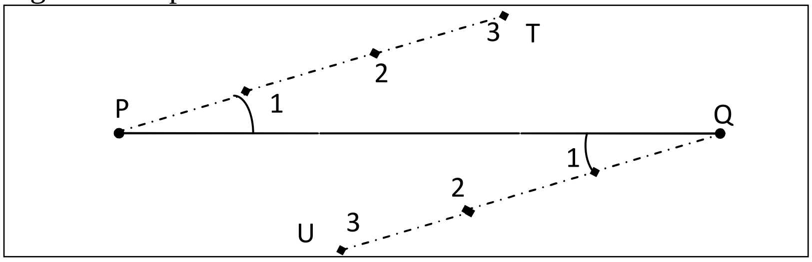
1º- Traçar a semi-reta auxiliar $\overline{PT}$ fazendo um ângulo qualquer com $\overline{PQ}$. E a semi-reta $\overline{QU}$ com o mesmo ângulo que $Q\hat{P}T$, porém com sentido oposto.

Figura 1. Etapa 1.



2º- Marcar sobre $\overline{PT}$, a partir de P, com abertura do compasso qualquer três divisões iguais, numerando-as. E sobre $\overline{QU}$ a partir de Q a mesma divisão.

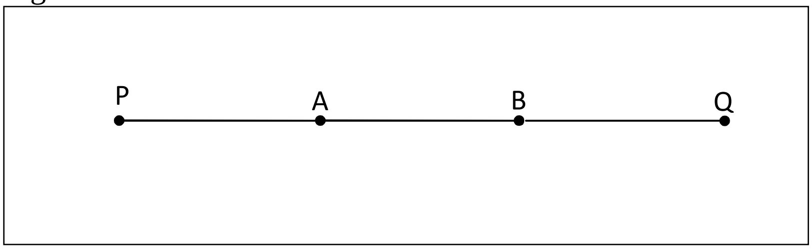
Figura 2. Etapa 2.



[1] Fazendo uma reflexão desse acontecimento, vimos que quando foi introduzido um assunto diversificado do cotidiano dos participantes do minicurso, no caso, os fractais, trouxe uma ação positiva que foi o prazer de aprender algo novo, a curiosidade, a motivação.

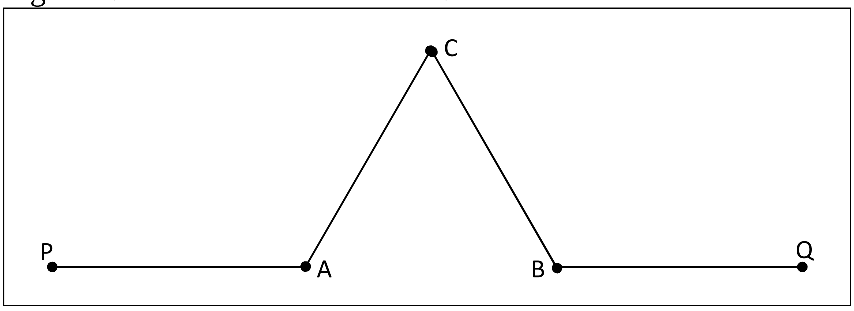
3°- Ligar o último ponto marcado sobre a semi-reta auxiliar $\overline{PT}$ ao ponto Q e os demais na ordem que se segue, determinando sobre o seguimento de reta $\overline{PQ}$ os pontos P (extremidade do segmento), A e B.

Figura 3. Curva de Koch – Nível 0.



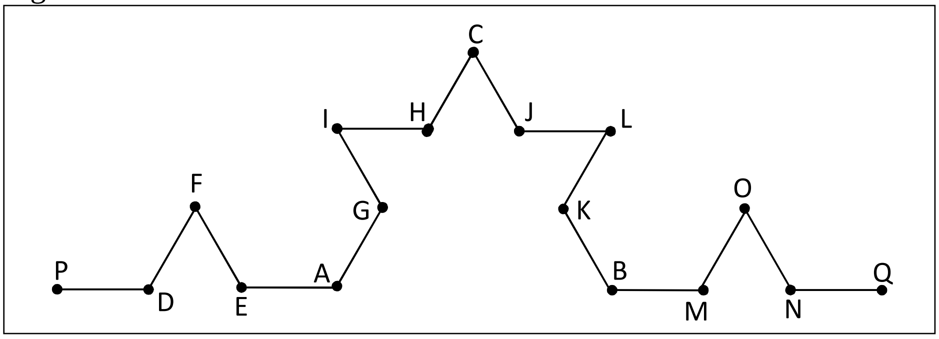
Retirou-se a fita adesiva compreendida entre os pontos A e B do segmento (segmento intermediário) e o substituiu por um triângulo eqüilátero sem a sua base da seguinte forma: com a ponta seca do compasso no ponto A e abertura traçou-se um arco e repetiu-se o processo com a ponta seca no ponto B. O encontro dos arcos é o ponto C sendo o terceiro vértice do triângulo eqüilátero. Assim, ligaram-se os segmentos e com a fita.

Figura 4. Curva de Koch – Nível I.



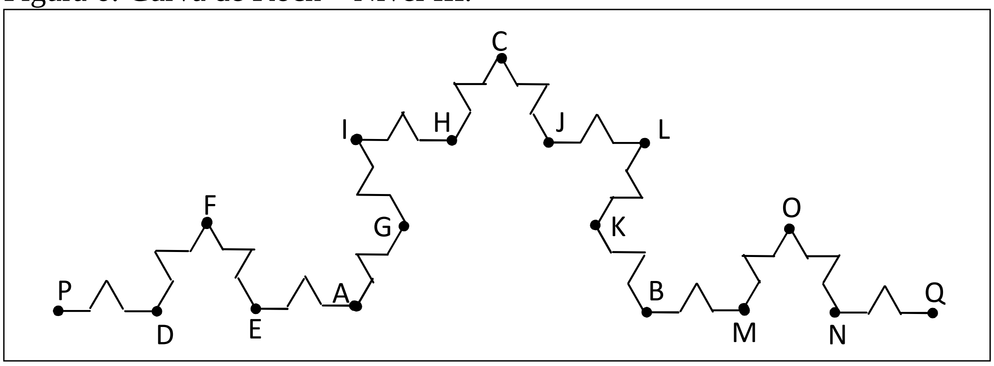
Para o segmento repetiu-se o mesmo procedimento dividindo-o em três partes iguais encontrando os pontos D e E, retirando-se o segmento intermediário e substituindo por um triângulo eqüilátero sem base sendo F o terceiro vértice. Para o segmento , novamente com o mesmo procedimento, encontrou-se os terços médios (os pontos G e H) e o vértice do triângulo eqüilátero I. No segmento têm-se os terços médios J e K e o vértice do triângulo o ponto L. E, por fim, no segmento têm-se M e N como terços médios e O como vértice do triângulo.

Figura 5: Curva de Koch – Nível II.



Concluído o primeiro estágio, passou-se para o segundo. Repetiram-se os mesmos passos, descritos anteriormente, mas agora para os segmentos , , , , , , , , , , , , , , e . É válido lembrar que poderia continuar as iterações, já que se trata de um fractal. Nesse estágio inicial, os professores perceberam que era possível relacionar os elementos constituintes desse fractal com alguns conceitos simples da Geometria Euclidiana utilizando-se de seus instrumentos usuais de construção gráfica como régua e compasso, ou seja, é possível trabalhar conceitos de desenho geométrico o que hoje é pouco utilizado nas salas de aula.

Figura 6: Curva de Koch – Nível III.



Seguindo a atividade, usou-se a trena para medir o comprimento do fractal construído no quadro-negro e, desse modo, surgiu a discussão de que a trena não poderia cobrir toda a extensão do fractal para medi-lo. Para facilitar a compreensão dessa idéia, foi feita uma analogia no sentido que se fosse medido o comprimento da costa com barcos grandes enfileirados um após o outro, eles passariam por cima de alguns detalhes e que com barcos menores algumas enseadas na costa poderiam ser melhor preenchidas.

Indo mais além, para entender melhor essa idéia sobre medir detalhes, é como se tivéssemos um compasso de abertura de 1 m, sendo assim, ele não poderia medir detalhes menores do que a sua abertura. Desse modo, obteve-se um comprimento de 270 cm com auxílio da trena.

Usando a régua de 90 cm, pode-se adentrar em alguns detalhes do fractal para medi-lo, porém contendo muitos outros detalhes que não puderam ser verificados, chegou ao resultado de 360 cm (4 segmentos de 90 cm cada). Agora com a régua de 30 cm, obteve-se um comprimento de 480 cm (16 segmentos de 30 cm cada) e, por fim, com a régua de 10 cm, um comprimento de 640 cm (64 segmentos de 10 cm cada).

Ao fim dessa etapa, eles notaram que dependendo do objeto escolhido para medir o fractal eram obtidos comprimentos distintos, ou seja, ficou evidente que o comprimento da costa do Brasil depende da escala trabalhada e, por conta disso, encontram-se na literatura fontes com informações distintas. Novamente, viu-se que por meio de uma atividade com fractal poderia introduzir conceitos matemáticos, como escalas e medidas.

Em seguida, foi analisado o fractal construído em relação à quantidade de segmentos obtidos, o comprimento de cada segmento e o comprimento total, e para facilitar a atividade, considerou-se, inicialmente, seu tamanho como unitário. Assim, com a participação dos professores e futuros professores presentes no mini-curso, pode-se construir a seguinte tabela.

Tabela 1: Características da Curva de Koch.

Nível	Quantidade de segmentos	Comprimento de cada segmento	Comprimento total da curva
0	1	1	1
1	4	1/3	4/3
2	16	1/9	16/9
3	64	1/27	64/27
⋮	⋮	⋮	⋮
n	4^n	$\left(\frac{1}{3}\right)^n$	$\left(\frac{4}{3}\right)^n$

A construção dessa tabela facilita a visualização de algumas seqüências numéricas. Desse modo, é possível trabalhar Progressão Geométrica (P.G.) com razão de números inteiros e também com números fracionários ao fazer uma análise mais detalhada dos dados encontrados. Assim, observando a quantidade de segmentos da curva de Koch percebe-se uma P.G. de razão igual a 4 e, ainda, dá abertura para trabalhar funções exponenciais para encontrar os valores na iteração “n”. Por outro lado, examinando o comprimento de cada segmento nota-se uma P.G. de razão 1/3 e na iteração “n” obteve-se uma função exponencial fracionária.

Com isso, dá oportunidade para aproveitar operações com exponenciais e trabalhar algumas propriedades como, por exemplo, no cálculo do comprimento total da curva que, em vez de analisar a seqüência numérica, pode-se efetuar o cálculo de $4^n.\left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(4.\frac{1}{3}\right)^n$. É importante salientar que não se poderia calcular o comprimento total da curva por uma soma de progressão geométrica infinita já que a razão é 4/3 e para efetuar tal soma seria necessário que a razão (r) fosse 0. Notaram-se algumas dificuldades encontradas pelos participantes ao tentarem montar as funções geradoras do nível “n”.

Trabalhando de forma mais intuitiva, foi pedido a eles que calculassem com auxílio de calculadora o comprimento de cada segmento no nível n, ou seja, multiplicar várias vezes 1/3 por ele mesmo e com isso chegaram à conclusão que se continuassem o cálculo o comprimento de cada segmento se aproximaria de zero. E de forma análoga, calcularam o comprimento total do fractal e perceberam que o comprimento aumentava continuamente, ou seja, seria infinito.

O objetivo dessa parte da atividade foi mostrar que era possível trabalhar conceitos de progressão geométrica, potências, operações com frações, além da possibilidade de introduzir a idéia de proximidade e, também, a idéia de infinito.

Viu-se que a partir dessa rica atividade com fractal podem-se introduzir conceitos de Geometrias Não-euclidianas assim como conceitos matemáticos estudados pelos alunos, além de possibilitar correlações com outras ciências.

Considerações Finais

Deste modo, este trabalho veio contribuir com muitos professores para uma reflexão sobre a sua prática educativa dentro de sala de aula, percebendo a necessidade de se trabalhar novos saberes escolares como as Geometrias Não-euclidianas, em especial, a Fractal. Baseando-se nisso, foi desenvolvida essa atividade para mostrar que é possível fazer inovações em sala de aula além de ser um recurso alternativo para os professores introduzirem o estudo da Geometria Fractal.

Assim, percebe-se que é possível trabalhar conceitos de geometria fractal dentro da sala de aula e, não menos importante, possibilita relacionar conceitos com a Geometria Euclidiana, além de ser uma maneira nova e diversificada de motivar e incentivar os alunos ao estudo.

E com base nas atividades desenvolvidas podemos concluir que o comprimento da costa do Brasil depende da escala trabalhada, da mesma forma que Xavier afirma “A costa brasileira é um fractal, logo não tem um (único) comprimento. O comprimento depende da escala de medida.” (XAVIER, p. 22)

Portanto, vemos a necessidade de se desenvolver atividades sobre Geometrias Não-euclidianas para sem aplicados em sala de aula com o intuito de divulgar novos saberes para os alunos e, para isso ocorra, deve-se dar oportunidade para que esses trabalhos sejam transmitidos para professores e futuros professores da Educação Básica.

Referências

BARBOSA, R. M. **Descobrindo a geometria fractal** – para a sala de aula. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC / SEF, 1998. Disponível em <www.portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf> Acesso em 16 jan. 2008

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais** + (PCN+) **–** Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2002.

GLEICK, J. **Caos**: a criação de uma nova ciência. Tradução de Waltensir Dutra. Rio de Janeiro: Campus, 1989.

KALLEF, A. M. et. al. **Desenvolvimento de Atividades Introdutórias ao Estudo das Geometrias Não-Euclidianas:** Atividades Interdisciplinares para Sala de Aula e Museus Interativos. Disponível em: <http://www.ufmg.br/congrext/Educa/ Educa56.pdf>. Acesso em: 11 fev. 2008.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da Matemática**: uma análise da influência francesa. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

PARANÁ, Secretaria de Estado da Educação do Paraná. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica Matemática**. Curitiba, 2008. Disponível em <http://www.diaadiaeducacao. pr.gov.br/diaadia/diadia/arquivos/File/diretrizes_2009/matematica.pdf>. Acesso em 05 mar. 2009.

SANTOS. T. S. et. al. **Geometrias não-euclidianas**. In. ENCONTRO INTERDICIPLINAR DE EDUCAÇÃO, 1., 2008. Campo Mourão. *Anais*... Campo Mourão: FECILCAM, 2008. p. 54-56.

XAVIER, B. **Qual é o comprimento da Costa do Brasil?** Rio de Janeiro. Disponível em <http://omnis.if.ufrj.br/~carlos/inic/bernardo/fractal.pdf>. Acesso em 28 maio 2008.