INTUIÇÃO, VISUALIZAÇÃO E TECNOLOGIA NO ENSINO DE LIMITES NA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

GT 02 – Educação Matemática no Ensino Médio e Ensino Superior

Ana Regina Gregory Brunet – ULBRA – anabrunet@cpovo.net
José Carlos Pinto Leivas – ULBRA – leivasjc@yahoo.com.br
Magda Leyser – ULBRA – magda.leyser@gmail.com

Resumo: Este trabalho representa um recorte de um projeto de pesquisa mais amplo que busca envolver a Geometria nas diversas áreas do conhecimento matemático, particularmente na formação inicial do professor de Matemática. Utiliza-se intuição, visualização e a tecnologia computacional com o uso do software GeoGeobra para construção e posterior formalização do conceito de limite de uma função real de variável real. O projeto de pesquisa está em andamento desde o ano de 2006 e aqui é apresentado um recorte na perspectiva do Cálculo Diferencial e Integral e da Análise Matemática na Licenciatura em Matemática. Utilizou-se inicialmente pesquisa bibliográfica junto ao *International Group for Psychology of Mathematics Education* e no sentido de identificar interesse pelo tema em Educação Matemática para posteriormente utilizar a pesquisa experimental junto a grupos de alunos da Licenciatura em que os autores são docentes. A pesquisa encontra-se em andamento e espera-se comprovar a hipótese de que o uso de tecnologias computacionais pode representar um diferencial no ensino e na aprendizagem do Cálculo Diferencial, Integral e Análise Matemática na formação inicial do professor.
Palavras-chave: intuição; visualização; tecnologias; limites.

Introdução

Cálculo Diferencial e Integral é uma das disciplinas que é oferecida a uma grande diversidade de cursos na Universidade e também para muitas escolas técnicas de Ensino Médio. Observa-se, em uma rápida passagem pelos livros destinados a esse conteúdo matemático, que não ocorreram diferenças substanciais nas últimas décadas sobre a forma como os conteúdos dessa disciplina são abordados. Esta comunicação científica, como um recorte de um projeto de pesquisa dos proponentes sobre o ensino de Geometria, tem a intenção de apresentar uma possibilidade de trabalhar o conceito de limite de funções reais de uma variável real, por meio da intuição e visualização, mostrando que, juntamente com o uso de recursos tecnológicos, a Geometria pode se apresentar como um interlocutor entre diversas subáreas do conhecimento matemático, especialmente na formação inicial do professor de Matemática.

Reformulações curriculares nos cursos superiores ocorrem frequentemente em nosso país. As Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores (BRASIL, 2001) têm fornecido subsídios para tais reformulações. Entretanto, essas ainda não são percebidas na forma como os conteúdos matemáticos são tratados na formação inicial, especialmente no que diz respeito à formação de professores, foco de nossa pesquisa. Para Cury (2001, p. 16) ocorre um distanciamento grande entre na formação docente entre as áreas específicas e a pedagógica, ocorrendo o mesmo com o bacharelado.

> Já opinamos que o professor da Licenciatura em Matemática deve ter um conhecimento abrangente sobre os conteúdos das disciplinas do curso. Mas o corpo de conhecimentos dessa ciência atualmente é muito grande, como em qualquer outra, e os docentes não conseguem ter uma visão global de todas as disciplinas para fazer as pontes entre os diversos conteúdos. Além disso, os professores, mesmo trocando de disciplinas periodicamente, não conseguem se atualizar e lecionam, muitas vezes, uma Matemática "antiga".
>
> A generalização de uso de calculadoras e computadores, por exemplo, já desatualizou uma série de conteúdos ensinados em todos os níveis de ensino, mas muitos professores (e livros-texto) insistem em repeti-los, em aulas que poderiam ser aproveitadas para desenvolver outros conteúdos e capacidades.

Nossa pesquisa busca criar alternativa que ofereça ao futuro professor formas diferenciadas de desenvolver conteúdos tendo como fundamento a intuição geométrica ancorada pelas tecnologias computacionais como forma de utilizar a visualização, pois concordamos com Cury (2001, p. 19) quando afirma:

> Consideramos, então, que um terceiro ponto a ser levado em consideração na discussão sobre formação dos docentes para a Licenciatura em Matemática é a necessidade de pesquisas, de forma que o ensino esteja ancorado no conhecimento produzido pelo próprio docente.

O intuicionismo, como corrente filosófica, tem sido estudado por matemáticos cuja contribuição para a ciência é inegável como Poincaré e também por psicólogos que dirigiram sua atenção para questões envolvendo Matemática. Skemp (1993), por exemplo, diz ser um conceito um termo utilizado de forma ampla e de difícil definição, sendo essencial uma distinção do próprio conceito ao nome que lhe é associado. Para ele, um conceito é uma idéia e o nome do conceito é um som, uma marca sobre um papel associada a ele; por exemplo, números são conceitos matemáticos enquanto que numerais são os nomes que se atribui aos números; pontos ou retas são conceitos e seus desenhos numa folha de papel são uma forma de representá-los. Muitas vezes é difícil a comunicação de um conceito, como por exemplo, no caso de limite de uma função em um ponto. A intuição se faz necessária para compreender tal conceito juntamente com as representações geométricas de números e de aproximações.

Uma das formas com que Poincaré descreveu intuição foi relacionada aos sentidos e à imaginação. Para Fischbein (1987) a intuição tem uma variedade de significados, sendo aceito por uns e rejeitada por outros na ciência, por ser considerado um tema de difícil abordagem. Esse autor destaca que a função primordial da intuição é a de produzir certeza sobre representações e interpretações de fatos matemáticos aparentemente evidentes.

Klein (1927, p. 6) afirma que “antes de tudo, deve-se dar grande importância a uma *forte educação da intuição espacial*; depois se deve aumentar o ensino até chegar aos limiares do Cálculo Infinitesimal...”. Nesse sentido ele indica a importância, por exemplo, de começar uma familiarização imediata com os alunos “sempre sobre a base do *constante emprego de métodos gráficos* na representação de quaisquer leis no plano das variáveis (x, y), que hoje se utilizam em todas as aplicações da Matemática pelo **caráter de evidência** que presta.” (Ibid., p. 5. Grifo nosso).

A intuição para Davis e Hersh (1995, p.360) tem os seguintes significados:

> 1.) Intuitivo é o oposto de rigoroso;
> 2.) Intuitivo significa visual;
> 3.) Intuitivo significa plausível ou convincente na ausência de demonstração;
> 4.) Intuitivo significa incompleto;
> 5.) Intuitivo significa confiramos num modelo físico ou em alguns exemplos importantes;
> 6.) Intuitivo significa holístico ou integrativo, em oposição a pormenorizado ou analítico.

Para os autores, os formalistas afirmavam que nossos antecessores conseguiam encontrar teoremas corretos partindo de raciocínios incorretos, por responderem à própria intuição que possuíam e por isso Cauchy, apesar de não conhecer o significado formal da teoria de conjuntos, não conhecer o que é um número complexo ou até mesmo saber o que era uma integral ou uma curva, conhecia o teorema de Cauchy e sabia calcular corretamente um número complexo utilizando a integral sobre uma curva, uma vez que sendo um grande matemático podia confiar em sua intuição, segundo Davis e Hersh (1995).

Possuímos intuição pelo fato de que concebemos representações mentais de objetos aos quais estamos associando um determinado conceito, nesse caso, o de limite de uma função. Essas representações, quando feitas somente por métodos analíticos, segundo nossa experiência profissional, não leva a uma compreensão duradoura do conceito e não conduzem a soluções de problemas em níveis mais avançados no transcorrer das disciplinas do currículo da Licenciatura, como em Análise ou Matemática Aplicada, por exemplo.

No sentido de repetir muitas experiências que conduzam a uma representação mental de um mesmo conceito, o de limite de uma função talvez seja aquele em que o uso de tecnologias computacionais pode trazer inovações para o ensino de Cálculo.

Segundo Sancho e Hernández (2006) as tecnologias da informação e comunicação apresentam três tipos de efeitos transformadores, capazes de responder às necessidades formativas de nossos alunos: alteram a estrutura de interesses, ou seja, as coisas em que pensamos, que priorizamos, que julgamos fundamental ou obsoleto; mudam o caráter dos símbolos, ou seja, as coisas com as quais pensamos, pois as tecnologias ampliaram significativamente os signos e a capacidade de armazenamento de informações; modificam a natureza da comunidade, ou seja, a área em que se desenvolve o pensamento.

Assim, utilizar um software para a construção do conceito de limite de uma função oferece muitas vantagens, dentre as quais a rapidez na reprodução de representação gráfica de muitas funções, com uma variedade muito grande de pontos de aproximação, tanto na variável dependente quanto na variável independente. A visualização de gráficos dessas funções, suas representações e variações é uma das formas como a Geometria pode estar contribuindo para a formalização do conceito de limite de uma função a partir de deltas e épsilons.

Uma das funções da visualização apontada pelo *National Council of Supervisors of Mathematics* (NCSM), em 1990, quanto a competências fundamentais necessárias para que os alunos desempenhem com eficiência e eficácia suas funções no próximo século em Geometria, é *visualizar* como os objetos se movem no mundo. Assim, pensar no limite de uma função utilizando tecnologias computacionais possibilita esse aspecto dinâmico e não estático como é usualmente utilizado nas disciplinas de Cálculo.

Visualização tem sido um tema de pesquisa em Educação Matemática, especialmente nos encontros do *International Group for Psychology of Mathematics Education* (PME). No PME 13, de Paris, em 1989, o termo visualização surgiu em estudos de Mariotti e Arcavi, segundo Gutiérrez e Boero (2006). Mariotti identificou em crianças, de 11-13 anos, dois níveis de complexidade de pensamento intuitivo visual por meio de métodos que incluíam o clínico. Arcavi usou métodos computacionais. Arcavi e Nachmias envolveram adultos num ambiente computacional como forma de comparar representações em eixos paralelos para representação de funções lineares e seu envolvimento com a visualização de declividade.

Pensamento visual dos estudantes em Cálculo

Na medida em que o Cálculo prioriza método algorítmico em seu desenvolvimento, pode-se pensar se essa não seria uma razão pela qual estudantes que iniciam seus estudos matemáticos perdem ou não adquirem, até certo ponto, gosto pelas construções conceituais. A esse respeito, Vinner (1989, p. 149) questiona: “Em que medida considerações visuais em Cálculo pode ser ensinado aos estudantes universitários? Até que ponto considerações visuais podem se tornar uma parte natural do pensamento matemático de estudantes universitários?” Esses questionamentos do autor conduzem a questões investigativas sobre ser ou não relevante considerar a habilidade de visualização para a aprendizagem de Cálculo, pois para alguns essa é uma habilidade nata, com o que não concordamos. Para o autor, “Assim, parece que não há provas evidentes de que pensamento visual não é uma necessidade para maior sucesso em Matemática". (p.150).

"O conceito matemático de limite é particularmente uma noção difícil, típica da espécie exigida em Matemática avançada", segundo Cornu (1991, p. 153) para quem essa noção "ocupa uma posição central no papel da Análise Matemática como um fundamento para a teoria de aproximações, de continuidade e de cálculo diferencial e integral" (idem). Ao nos questionarmos sobre o que é uma Matemática avançada, encontramos guarida em Tall (1991) a respeito de pensamento matemático avançado. Foi criado, junto ao PME em 1985, um grupo de estudos, com o mesmo nome, envolvendo matemáticos e educadores matemáticos para a escrita de um texto também com esse mesmo nome, o qual foi publicado em 2001 e do qual extraímos o seguinte:

> [...] criatividade está preocupada com a forma como as idéias sutis de investigação são construídas na mente humana e uma prova disso é a forma como essas idéias são ordenadas em um desenvolvimento lógico tanto para verificar sua natureza quanto para apresentá-las à aprovação da comunidade matemática. (Tall, 1991, p. xiii).

Para o autor,

> Um aspecto muito mais valioso da teoria de Piaget é o processo de transição de um estado mental para outro. Durante essa transição, é possível que comportamento instável, com a experiência de idéia prévia, conflite com novos elementos. Piaget usou os termos assimilação para descrever o processo pelo qual o indivíduo toma um novo dado e acomodação ao processo pelo qual a estrutura cognitiva do indivíduo deve ser modificada. Ele vê assimilação e acomodação como complementares. Durante uma transição muita acomodação é necessária. Skemp (1979) coloca idéias semelhantes de uma forma diferente pela distinção entre o caso onde o processo de aprendizagem causa uma simples expansão da estrutura cognitiva do indivíduo e o caso em que há conflito cognitivo, exigindo uma reconstrução mental. É esse processo de reconstrução que provoca as dificuldades que ocorrem durante a fase de transição. (TALL, 1991, p. 9)

Dreyfys (apud Tall, 1991), ao fazer considerações sobre o processo de pensamento matemático avançado, estabelece relações entre representação e abstração no processo de aprendizagem e entre representações mentais e matemáticas, podendo e devendo ser utilizadas nos procedimentos didáticos para aprendizagem. Tais processos podem consistir de quatro estágios: "usando uma única representação; usando mais que uma representação em paralelo; utilizando links entre representações paralelas e integrando representações e flexibilizando conexões entre elas." (p. 39).

A pesquisa

Na primeira fase da pesquisa buscamos levantamentos na literatura a respeito do tema. Encontramos em Gutiérrez e Boeiro (2006, pp. 173-204) trabalhos como o de Mariotti, abordando provas e demonstrações em Educação Matemática, como um fato consensual de que sejam tratadas nos currículos. Para a autora, o caso da indução matemática pode ser visto como uma generalização atingida pelo reconhecimento de padrões gerais obtidos durante um dado processo, por exemplo, após uma série de representações de aproximações de valores de uma função real e, por uma seqüência de pontos no conjunto imagem, pode-se obter a aproximação de um valor a determinar nas pré-imagens, intuindo daí o conceito de limite. Também se pode ter uma generalização derivada de um processo de obtenção de padrões de regularidades ocorridas durante esse processo de obtenção de um dado resultado.

Encontramos também pesquisas relacionando às tecnologias e o ensino de Cálculo como o de Ferrara, Pratt e Robutti (idem, pp. 237-273) ao desenvolverem aspectos: epistemológicos, cognitivos e curriculares em Cálculo pelo poder da tecnologia como um importante e particular facilitador do trabalho dos estudantes. Dizem os autores,

> "As mesmas soluções podem então ser usadas para planejar projetos curriculares: Desse modo, a pesquisa pode ser útil para a prática docente. Nossa análise é focada na mediação da tecnologia e do papel do professor sobre esses obstáculos epistemológicos: limites, derivadas, somas infinitas, integrais." (p. 257).

Utilizamos como metodologia em nossa pesquisa, num primeiro momento, a pesquisa bibliográfica, a qual para Fiorentini (2006, p. 71) é "a modalidade de estudo que se propõe a realizar análises históricas e\ou revisão de estudos ou processos [...]" e, num segundo momento, as pesquisas experimentais, quase-experimentais ou de laboratório, as quais se "caracterizam pela realização de "experimentos" que visam verificar a validade de determinadas hipóteses em relação a um fenômeno ou problema".

O experimento

O presente trabalho desenvolveu-se como um estudo de caso cujos sujeitos foram alunos do curso de licenciatura em Matemática em sala com recursos de informática do campus de Canoas da Universidade Luterana do Brasil. O experimento foi realizado no ambiente virtual do software de matemática dinâmica GeoGebra, que combina GEOmetria dinâmica com álGEBRA, com foco na construção do conceito de limite de função. Cada um dos dez participantes dispôs de um computador com o software instalado.

Iniciamos o experimento com a idéia intuitiva de limite de função em um ponto. Representou-se no ambiente computacional o gráfico de uma função contínua f, introduzido no software pela expressão algébrica. Escolheu-se um ponto a e seu limite L associado e, lançando mão de conceitos geométricos, marcou-se um ponto x sobre o eixo das abscissas, sua imagem *f(x)* e o ponto *(x, f(x))* com suas âncoras. Com os recursos de movimentação de ponto do software visualizamos o comportamento da imagem *f(x)* ao *x* se aproximar do ponto *a* escolhido.

A partir da idéia de proximidade induziu-se a idéia de vizinhança. Explorou-se as idéias de vizinhança, vizinhança simétrica e vizinhança perfurada usando representações de ponto sobre segmento no ambiente virtual.

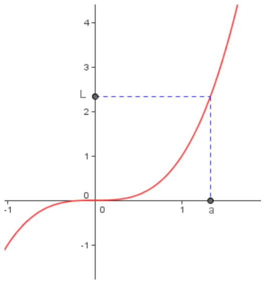

Figura 1 – Exemplo de *f(x)*

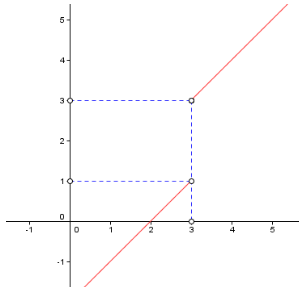

Figura 2 – Exemplo de *g(x)*

Dando continuidade a exploração, retomou-se a função *f* para observar a relação entre vizinhança e limite de função em um ponto, conforme exemplo da figura 1. *A* seguir, se introduziu uma função *g* com descontinuidade de salto em um ponto como na figura 2 e, novamente, marca-se um ponto *x* sobre o eixo das abscissas, sua imagem *g(x)* e o ponto *(x, g(x))* com suas âncoras. Com os recursos de movimentação de ponto do software visualizou-se o comportamento da imagem *g(x)* ao *x* se aproximar do ponto de descontinuidade.

A partir dessa etapa foi proposta ao grupo a seguinte investigação: "Como diferenciar as situações das funções *f* e *g* nos respectivos pontos escolhidos utilizando vizinhança?".

Síntese e Análise dos dados

Os três pesquisadores registraram suas observações durante o experimento e se reuniram posteriormente para elaboração da síntese e análise dos dados.

Todos os sujeitos declararam que *f(x)* se aproxima de *L* ao *x* tender ao ponto *a*, verbalizando "os *x* vizinhos de *a* tem imagem *f(x)* vizinhas ao *L*" e "quanto mais próximo de *a* estiver *x*, mais próximo de *L* estará *f(x)*". Também todos perceberam que a situação da função *g* no ponto de descontinuidade é diferente da situação que ocorreu com *f* no ponto *a*, pois falaram "... pelo movimento do ponto *x*, *g(x)* se aproxima de dois pontos diferentes..." e "primeiro *g(x)* se aproxima de um, depois de outro ponto" e, ainda, exibindo o movimento do ponto *x* “se vem por aqui (direita), *g(x)* se aproxima de 3 e se vem por aqui (esquerda) *g(x)* se aproxima de 1, não vai para um ponto só”.

Durante o desafio proposto se observou maior troca de idéias entre os participantes. Todos concluíram que no caso da função *f*, como no exemplo da figura 1, uma vizinhança do ponto *a* tem como imagem uma vizinhança do ponto *L*, e, no caso da *g*, uma vizinhança do ponto de descontinuidade possui uma imagem “furada”. Nenhum deles pensou em tomar primeiro uma vizinhança do contradomínio e verificar a existência de vizinhança no domínio de tal forma que *x* desta vizinhança possua imagem na primeira.

Considerações Finais

O uso de tecnologias computacionais foi um facilitador no entendimento de limite pelos alunos, visto que todos eles conseguiram diferenciar, mesmo sem nomear, as duas situações propostas, a saber, continuidade e descontinuidade de função em um ponto por vizinhanças. Conforme as considerações de Vinner (1989) a visualização geométrica do gráfico das funções e a dinâmica do software favoreceram a intuição que acreditamos necessária a compreensão desse conceito como também faz referência Fischbein (1987) uma vez que no diálogo dos alunos a intuição foi a ferramenta essencial para produzir a certeza sobre as representações e interpretações dos fatos matemáticos aparentemente evidentes.

A experiência nos levou a pensar que a formalização do conceito de limite deva ser induzida, pois nenhum dos alunos considerou a idéia formal. É possível que com a experiência de idéia prévia, exista conflito com novos elementos. No caso, a idéia prévia é considerar a imagem a partir de valores do domínio, e o novo elemento é considerar valores do domínio a partir de valores da imagem.

Pretendemos dar seqüência a este projeto de pesquisa elaborando e aplicando outros instrumentos de investigação na tentativa de comprovar a hipótese de que o uso de tecnologias computacionais pode representar um diferencial no ensino e na aprendizagem do Cálculo Diferencial, Integral e Análise Matemática na formação inicial do professor.

Referências

BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. *Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura***.** Brasília, 2001. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CES13022.pdf>. Acesso em: 10 jan. 2008.

CURY, Helena Noronha. *Formação de Professores de Matemática*: uma visão multifacetada. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2001.

DAVIS,P. HERSH. *A experiência matemática*. Lisboa: Gradiva, 1995.

FISCHBEIN, Efraim. *Intuition in science and mathematics*: an educational approach. Dordrecht: Reidel, 1987.

DREYFUS, Tommy. *Advanced mathematical thinking processies*. In: Tall, D. Advanced mathematical thinking. Dordrecht: Kluwer, 1991.

GUTIÉRREZ, A. BOERO, P**.** *Handbook of research on the psychology of mathematics education***:** past, present and future. Rotterdam : Sense Publishers, 2006.

KLEIN, Félix. *Matemática elemental desde um punto de vista superior*. Madrid: [s.n], 1927. v.1 e 2.

NCTM. *Princípios e normas para a matemática escolar*. Lisboa: APM, 2008.

SANCHO, Juana M., HERNÁNDEZ, Fernando. *Tecnologias para transformar a educação*. Porto Alegre: Artmed, 2006.

SKEMP, R. *Psicologia del aprendizage de las matemáticas*. 2. ed. Madrid. Edições Morata, 1993.

VINNER, Shlomo. *Cognitive theory of advanced mathematical thinking*. In: Tall, D. Advanced mathematical thinking. Dordrecht: Kluwer, 1991.