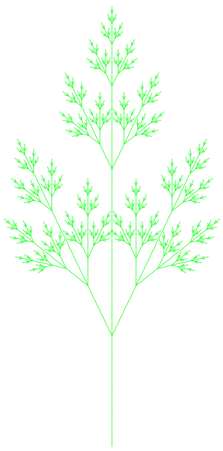
Aprendendo

MuPAD



Cristina Lúcia Dias Vaz

cvaz@ufpa.br

Labmac - UFPA
Janeiro 2001

Conteúdo

Introdução

O que é Computação Simbólica?

A computação simbólica ou álgebra computacional é um ramo da Ciência da Computação e da Matemática cujos fundamentos teóricos-algorítmicos centralizam-se no estudo de problemas relacionados com objetos não numéri- cos (isto é, símbolos) que podem ser tratados por um computador, com ênfase especial em cálculos simbólicos tais como fatoração de polinômios, resolução de equações algébricas e equações diferenciais, operações e cálculos com matrizes, grupos, tensores, etc.

Os cálculos realizados no tratamento simbólico são exatos (isto é, têm precisão infinita) em contraste ao correspondente tratamento numérico. Embora, em determinados problemas, os dois métodos devam ser combinados para gerar, em primeiro lugar, fórmulas simbólicas que posteriormente serão tomadas com *input* em programas numéricos, como é o caso da resolução de equações algébricas.

Nas últimas décadas muitos sistemas de computação simbólica foram desenvolvidos. Os aplicativos mais conhecidos são Axiom, Derive, Macsyma, Maple, Mathematica, Reduce e **MuPAD**.

Computação simbólica na Educação

Estes aplicativos são de grande utilidade no processo de ensino - aprendizagem. São ferramentas que podem ser usadas para tornar o ensino da Matemática mais experimental, permitindo a abordagem de problemas mais complicados com visualização gráfica, dando assim oportunidade ao estudante de *aprender fazendo*.

Por que o MuPAD?

MuPAD - Multi Processing Algebra Data Tool é um aplicativo simbólico e numérico desenvolvido principalmente pela Universidade de Paderborn (Alemanha), distruibuído gratuitamente com própositos educacionais. Possui uma vasta *biblioteca* de operações matemáticas usuais, pacotes e uma completa linguagem de programação. Dispõe de manual, tutoriais e demonstrativos elaborados com base na funcionalidade dos hipertextos e fórmulas interativas, que estão disponíveis na Internet. é um sistema orientado por objetos e programação em paralelo. Suas principais características são :

- é de acesso gratuito na Internet;
- é análogo ao MATHEMATICA e ao MAPLE;
- é compatível com o UNIX, LINUX, MAC e Windows ;

- permite processamento em paralelo;
- é de fácil instalação.

O objetivo principal destas notas é fornecer uma breve introdução aos comandos do aplicativo versão Light 2.0 que são necessários para tratar alguns tópicos da Matemática, tais como: cálculo simbólico e numérico, resolução de equações, gráfico de funções, limite, derivada, integral e séries. Pode ser usado como um *manual* para uso do computador com ferramenta auxiliar no estudo da Matemática e suas aplicações.

Como obter o MuPAD?

Existem vários sites na Internet sobre o aplicativo **MuPAD** mas o site oficial é http://www.mupad.com onde você pode encontrar informações sobre o manual, tutoriais, trabalhos publicados, referências bibliográficas e obter o aplicativo.

Preliminares

O aplicativo **MuPAD** trabalha de modo interativo, isto é, ele exibe uma área de trabalho na qual você deverá digitar os comandos e visualizar as respostas.

Algumas instruções preliminares são necessárias antes de você começar a usar o aplicativo.

- Quando a área de trabalho está pronta para ser usada surge o sinal •, após o qual você deverá digitar os comandos;
- Você pode usar o **terminador** *dois pontos* (:) após cada comando. Este terminador omite a visualização do resultado;
- Sempre que terminar de digitar um comando acione a tecla < enter > para que o **MuPAD** efetue as operações;
- Todos os comandos do **MuPAD** são escritos com letras minúsculas. O aplicativo faz diferença entre maiúsculas e minúsculas. Por exemplo, **sin(x)** é diferente de **Sin(x)** ou **sin(X)**;
- Na versão **MuPAD** Light não podemos corrigir erros de digitação na linha de comando. Deve-se copiar a linha ou digitar tudo novamente.

Capítulo 1

Efetuando operações

Operadores Aritméticos

Você pode usar o **MuPAD** como uma calculadora efetuando operações numéricas com os seguintes :

x∧y ou _**power**(x,y)

x−y ou _**subtract**(x,y)

x/y ou _**divide**(x,y)

x∗y ou _**multi**(x,y)

x+y ou _**plus**(x,y)

Exemplo 1

Efetue as seguintes operações:

a) $5 \times 8 \times 3$

b) 3,2 + 6,32

c) $(8+5)^3 - 6 \times (1+4)$

d) $\dfrac{2,65}{4,5}$

Soluções:

a) digite: 5*8*3 pressione < enter >
resposta: 120

b) digite: 3.2 + 6.32 pressione < enter >
resposta: 9.52

c) digite: (8 + 5)^3 - 6*(1 +4) pressione < enter >

resposta: 2167

d) digite: 2.65/4.5 pressione < enter >
resposta: 0.5888888

Resultados aproximados e exatos

Como o **MuPAD** é um apliactivo simbólico, frequentemente vai gerar resultados **exatos** e não resultados **aproximados**. Para obtermos usamos o comando do seguinte modo:

float(expr)	resultado aproximado da expressão **expr**
DIGITS:= n : float(expr)	resultado aproximado de **expr** com precisão de **n** dígitos.

Exemplo 2

a) Calcule o valor exato e o valor aproximado de $\frac{1}{7} + \frac{3}{5}$

b) Calcule o valor aproximado de $\frac{40}{13}$ como 30 dígitos.

Soluções:

a) digite: $1/7 + 3/5$ pressione < enter >

resposta: $\frac{26}{35}$

digite: float$(1/7 + 3/5)$ pressione < enter >

resposta: 0.7428571428

b) digite: DIGITS:=40: float(40/13) pressione < enter >

resposta: 3.076923076923076923076923076923076923077

Funções

O **Mu**PAD possui as seguintes constantes e que podem ser usadas diretamente. Note que os argumentos das funções estão entre PARÊNTESES e os nomes iniciam com letras MINÚSCULAS.

Funções	
abs(x)	$\|x\|$
exp(x)	e^x
ln(x)	$\ln(x)$
sign(x)	$\frac{x}{\|x\|}$
sqrt(x)	$\sqrt{x}$
cos(x)	$\cos(x)$
sin(x)	$\text{sen}(x)$
tan(x)	$\text{tg}(x)$
acos(x)	$\arccos(x)$
asin(x)	$\text{arcsen}(x)$
atan(x)	$\text{arctg}(x)$

Constantes	
E	2.7182818...
infinity	∞
PI	$\pi = 3.1415926...$
undefined	valor indefinido

Exemplo 3

a) Calcule o valor aproximado de $\ln(11)$, e^2 e $\text{sen}\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Soluções:

a) digite: ln(11.0) pressione < enter >

resposta: 2.397895273

b) digite: exp(2.0) pressione < enter >

resposta: 7.389056099

c) digite: float(sin(PI/7)) pressione < enter >

resposta: 0.4338837391

Note que se operamos com um valor decimal (ou exato) o aplicativo interpreta como aproximado (ou exato).

Números Complexos

O aplicativo **MuPAD** efetua operações com usandos os operadores aritméticos dados na Seção e as funções dadas na seção anterior.

z = x + Iy	número complexo
Re[z]	parte real do complexo z
Im[z]	parte imaginária do complexo z
conjugate[z]	complexo conjugado $\overline{z}$
abs(z)	valor absoluto $\|z\|$

Exemplo 4

Efetue as seguintes operações:

a) $\dfrac{2+3i}{3-4i}$; b) $i^5 + i^{16}$ c) $3 \times (i+1) \times (1+i^{-8})$

d) $\sqrt{-8}$. e) $|z|$ com $z = \dfrac{(1+i)}{\sqrt{2}}$ f) $\overline{z}$ com $z = 2i \times (-5+4i)$.

Soluções

a) digite: (2+3*I)/(3-4*I) pressione < enter >

resposta: $-\frac{6}{25} + \frac{17\ \mathrm{I}}{25}$

b) digite: I^5 + I^16 pressione $<$ enter $>$

resposta: 1 + I

c) digite: 3*(I + 1)*(1 + I^ − 8) pressione $<$ enter $>$

resposta: 6 + 6 I

d) digite: sqrt(-8.0) pressione $<$ enter $>$

resposta: 2.828427124 I

e) digite: abs((1+I)/sqrt(2)) pressione $<$ enter $>$

resposta: $2^{1/2}(1/2)^{1/2}$

f) digite: conjugate((-5+4*I)*2*I) pressione $<$ enter $>$

resposta: -8 + 10 I

Usando resultados anteriores

O comando **%** permite a manipulação dos resultados já obtidos.

Exemplo 5

Siga as instruções dadas abaixo.

digite: 25^2 pressione $<$ enter $>$

resposta: 625

digite: %+10 pressione $<$ enter $>$

resposta: 635

digite: 3*% pressione $<$ enter $>$

resposta: 1905

digite: % + % pressione $<$ enter $>$

resposta: 3810

Definindo variáveis

Em alguns casos é mais conveniente darmos um *nome* aos resultados. Isto pode ser feito através do identificador := (*dois pontos igual*) do seguinte modo:

x:=a	atribuindo o valor a a variável x
delete x	apagando o valor atribuído a variável x

Exemplo 6

Siga as instruções dadas abaixo.

digite: x:=10 pressione < enter >

resposta: 10

digite: x/5 pressione < enter >

resposta: 2

digite: delete x: pressione < enter >

digite: x pressione < enter >

resposta: x

Observe que quando *apagamos* o valor atribuído a variável x, o programa retorna o *símbolo* usado como nome da variável.

Operações simbólicas

Uma das mais importantes características do aplicativo **MuPAD** é que efetua operações (**simbólicas**), isto é, efetua operações algébricas tais como fatorar um polinômio, calcular as raízes de uma equação polinomial, resolver sistemas de equações, manipular e simplicar expressões algébricas, etc.

Podemos usar os operadores aritméticos para efetuar , como mostra o seguinte exemplo.

Exemplo 7

Siga as instruções.

digite: x^2 +4*x - 2 pressione < enter >

resposta: 4 x + x^2 - 2

digite: x + x pressione < enter >

resposta: 2 x

digite: x^5/x^3 pressione < enter >

resposta: x^2

Atribuindo valores

Frequentemente, precisamos substituir um símbolo por um *valor*, que pode ser um número ou outra expressão simbólica. Isto pode ser feito com os comandos já estudados ou com o seguinte comando:

subs(expr, x = a**)** substituindo x pelo valor a no objeto *expr*

subs(expr, x = a, y = b,...**)** efetuando várias substituições

Exemplo 8

a) Atribuir o valor 5 à variável x na expressão $x^3 - 3x + 5$.

b) Atribuir o valor $2a$ à varável x na expressão $\sqrt{2x-1}$.

c) Atribuir o valor -3 à variável x e o valor 8 à variável y na expressão $e^{x-1} + \ln y$.

d) Atribuir, respectivamente, os valores a^2, b^3 e c^2 para as variáveis x, y e z na expressão $|2z - y|^2 + xy - z^2y^3$.

Soluções

a) digite: x:=5: x^3-3*x + 5 pressione < enter >

resposta: 115

b) digite: x:=2*a: sqrt(2*x-1) pressione < enter >

resposta: $(4a - 1)^{1/2}$

c) digite: x:= -3: y:=8: exp(x+1) + ln(y) pressione < enter >

resposta: ln(8) + exp(-2)

d) digite: subs(abs(2*z-y)^2+x*y -z^2*y^3, x=*a*^2, y=*b*^3, z=*c*^2)
pressione < enter >

resposta: *a*^2 *b*^3 -*b*^9 *c*^4 + abs(2 *c*^2-*b*^3)^2

Manipulando expressões algébricas

Podemos , e uma expressão algébrica com os seguintes comandos:

expand(expr)	efetuando produtos e potências sem simplicar a expressão *expr*
factor(p(x))	fatorando o polinômio *p(x)*
simplify(expr)	simplificando a expressão *expr*

Exemplo 9

Siga as instruções dadas abaixo.

digite: expand((1+x)^3) pressione < enter >

resposta: 3 x + 3 x^2 + x^3 + 1

digite: factor(%) pressione < enter >

resposta: (1 + x)^3

digite: simplify(1 + 3 x + 3 x^2 + x^3+ 1 + 2 x + x^2)

pressione < enter >

resposta: 2 + 5 x + 4 x^2 + x^3

Exercícios

1.1 Calcule o valor da expressão $\ln\left(\ln\left(\sqrt[2]{\sqrt[2]{3}}\right)\right)$ com 6 casas decimais.

1.2 Calcule o valor exato da expressão $\sqrt{\sqrt{\sqrt{271}}}$

1.3 Calcule π com 200 casas decimais.

1.4 Calcule $\mathrm{sen}(3*\pi/7)\times\cos(\pi/5) + \mathrm{tg}(10*\pi)$

1.5 Defina os valores das variáveis x e y, respectivamente, como 35 e 12 e efetue as seguintes operações:

a) $x + y - x^2$

b) $\dfrac{x^3}{2y^2}$

c) Apagar os valores de x e y.

1.6 Calcule:

a) $(1+i)^2$ b) $1 + i + i^2 + i^3$ c) $|(-1+i)^3|$ d) $\overline{z}$ com $z = \dfrac{1}{i}$

1.7 Efetue as seguintes operações:

a) expand((1 + x)^4)

b) expand((1 + x)^4 + (1 + x)^6)

Capítulo 2

Listas

Sequências

Uma para o **MuPAD** é uma série de objetos separados por vírgulas que são geradas pelo comando **$** do seguinte modo:

objeto(i) **$** i = **n..m**

objeto : expressão ou objeto

$: gerador da sequência

i : indexador do *objeto*

n , m : números inteiros

Exemplo 10

a) Obtenha os 30 primeiros inteiros.

b) Obtenha a sequência x, x^2, x^3, x^4.

c) Calcule o 15° elemento da sequência do item (a) e o 3° elemento da do item (b).

d) Elimine o último elemento da sequência do item (b).

e) Calcule o somatório $\sum_{1=1}^{10} i^3$

Soluções

a) digite: seq1:=i $ i = 1..30 pressione < enter >

resposta: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21,22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30

b) digite: seq2:=x^i $ i = 1..4 pressione< enter >

resposta: x, x^2, x^3, x^4

c) digite: seq1[15], seq2[3] pressione < enter >

resposta: 15, x^3

d) digite: delete seq2[4]; seq2 pressione < enter >

resposta: x, x^2, x^3

Usaremos o comando **_plus** para o somatório e o comando **$** para gerar seus argumentos.

e) digite: _plus(i^3 $ i=1..10) pressione< enter >

resposta: 3025

Também podemos usar o com a palavra chave **in** para efetuar a operação na qual um objeto *avalia* uma série de outros objetos, como ilustra o exemplo abaixo.

Exemplo 11

Calcule o valor de f(x) em sen(x), x^2, 2, g(x), a.

Soluções

digite: f(x) $ x in sin(x) + x^2 + 2 + g(x) + a pressione < enter >

resposta: f(a), f(g(x)), f(sin(x)), f(x^2), f(2)

Manipulando Listas

Em algumas situações é conveniente agruparmos objetos tais como dados, variáveis ou expressões de modo que sejam interpretadas como uma única informação. Uma é uma série de objetos agrupados entre colchetes e separados por vírgulas. Para manipularmos listas podemos usar os seguintes comandos:

nops(dados**)** : números de elementos da lista *dados*

dados[i] ou **op(**dados**, i)** : i-ésimo elemento da lista *dados*

op(dados**, i..j)** : i-ésimo até o j-ésimo elemento da lista *dados*

append(dados , objetos**)** : acrescentando *objetos* a lista *dados*

. : junta listas

map(dados, f**)** : aplicando a operação *f* aos elementos da lista *dados*

zip(dados_1, dados_2, f**)**: combinando as listas $dados_1$ e $dados_2$ de acordo com a operação *f*

Exemplo 12

Gere duas litas com elementos *a, b, c, d* e *1, 2, 3, 4*, respectivamente e efetue as seguintes operações:

a) Extrair o 4° elemento da primeira lista e o 2° e o 3° elementos da segunda lista.

b) Juntar as listas.

c) Multiplicar as listas.

d) Multiplicar todos os elementos da primeira lista por 2.

Soluções

digite: L1:=[a,b,c,d]: L2:=[1,2,3,4]: pressione < enter >

a) digite: L1[4] , op(L2,2..3) pressione < enter >

resposta: d, 2, 3

b) digite: L1.L2 pressione < enter >

resposta: [a,b,c,d,1,2,3,4]

c) digite: zip(L1,L2,_multi) pressione < enter >

resposta: [a, 2 b,3 c, 4 d]

d) digite: map(L1,_multi, 2) pressione < enter >

resposta: [2 a, 2 b,2 c, 2 d]

Exemplo 13

Gere as listas X:= [x_1, x_2, x_3] e Y:=[y_1, y_2,y_3] e calcule:

a) O produto escalar X.Y = $x_1.y_1 + x_2.y_2 + x_3.y_3$

b) O *produto da matricial* de X como um vetor linha e Y como um vetor coluna, isto é,

$$\begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_1y_3 \\ x_2y_1 & x_2y_2 & x_2y_3 \\ x_3y_1 & x_3y_2 & x_3y_3 \end{bmatrix}$$

Soluções

digite: X:=[x1,x2,x3]: Y:=[y1,y2,y3]:   pressione < enter >

a) Calcularemos o produto interno usando os comando **_plus**, **op** e **zip**.

digite: _plus(op(zip(X,Y,_multi)))   pressione < enter >

resposta: x1 y1 + x2 y2 + x3 y3

b) Para calcularmos o produto entre a matriz linha X e a matriz coluna Y vamos primeiro gerar uma função vetorial $f(x)$ que multiplica cada elemento de Y por x e depois aplicar f em X.

digite: f− >(map(Y, _multi, x)):   pressione < enter >

digite: map(X,f)   pressione < enter >

resposta:
[[x1 y1, x1 y2, x1 y3], [x2 y1, x2 y2, x2 y3], [y1 x3, x3 y2, x3 y3]]

Conjuntos

Conjuntos são sequências aleatória de objetos entre chaves e separados por vírgula. Elementos repetidos não são considerados e para manipularmos podemos usar os seguintes comandos:

nops(A) : números de elementos do conjunto A

op(A, **i**) : i-ésimo elemento do conjunto A

op(A, **i..j**) : i-ésimo até o j-ésimo elemento do conjunto A

A **union** B : união dos conjuntos A e B

A **intersect** B : intersecção dos conjuntos A e B

A **minus** B : diferença entre A e B

contains(A, objeto): testa se o elemento *objeto* pertence ao conjunto A

Exemplo 14

Defina os conjuntos A = {1, 2, 3, a, b}, B = {a, b, c, 4, 5} e C = {x, y , z, a, b } e efetue as seguintes operações:

a) Extrair o 3° elemento de A e o 3° e o 4° elementos de B.

b) A ∪ B e A ∩ B.

c) A ∪ B ∩ C

Soluções

digite: A:={1, 2, 3, a, b} ; B:={a, b, c, 4, 5} ; C:={x, y, z, a, b}
pressione< enter >

resposta: {a, b, 1, 2, 3}
{a, b, c, 4, 5}
{a, b, x, y, z}

a) digite: A[5] , op(B,1..3) pressione < enter >

resposta: 3, 5, 4, c

b) digite: U:=Aunion B , A intersect B pressione < enter >

resposta: {a, b, c, 1, 2, 3, 4, 5}, {a, b}

c) digite: U intersect C pressione< enter >

resposta: {a, b}

Intervalos

Para obtermos dos números reais usamos os seguintes comandos:

Dom::Interval(a, b **)** : intervalo (a, b)

Dom::Interval([a], b **)** : intervalo [a, b)

Dom::Interval(a, [b] **)** : intervalo (a, b]

Dom::Interval([a], [b] **)** : intervalo [a, b]

Exemplo 15

Obtenha os seguintes intervalos:

a) (0, 1), (-1,3]

b) (-∞, ∞), [a,b]

Soluções

a) digite: Dom::Interval(0,1), Dom::Interval(-1,[3]) pressione< enter >

resposta:]0, 1[,]-1, 3]

b) digite: Dom::Interval(-infinity,infinity), Dom::Interval([a],[b])
pressione< enter >

resposta:]-infinity, infinity[, [a, b]

Exercícios

2.1 Crie uma lista dos dez primeiros números ímpares, isto é, $\{1, 3, 5, ..., 19\}$.

2.2 a) Gere duas listas de 8 inteiros entre 0 e 100. Dê o nome de L1 para a primeira lista e L2 para a segunda.

b) Junte as listas L1 e L2.

c) Encontre os elementos comuns nas listas L1 e L2.

d) Aplique a função x^2 à lista L1 e a função ln(x) a lista L2.

2.3 Dados os vetores v = (1, 3, 6), u = (4, -3, 3) e w = (2, 1, 5) calcule:

a) v + u, v - u

b) v.(2 u - 4 w)

c) Calcule o comprimento do vetor v sabendo que este comprimento é dado por $\|v\| = \sqrt{v.v}$.

2.4 Calcule $\sum_{n=1}^{5}\sum_{m=1}^{n}(n^2+m)$

2.5 Sejam os conjuntos A = $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ e B = $\{1, 3, 5, 7, 9\}$. Sendo n(A), n(B), n(A $\cap$ B), e n(A $\cup$ B) o número de elementos de A, B, A $\cap$ B e A $\cup$ B, verifique que n(A $\cup$ B) = n(A) + n(B) - n(A $\cap$ B)

2.6 Represente os seguintes intervalos:

a) $\{ x \in \mathbb{R};\ x \leq -1 \}$

b) $\{ x \in \mathbb{R};\ -2 < x \leq 2\}$

c) $(-\infty, 0) \cap (-1, 5]$

Capítulo 3

Equações

Operadores lógicos e relacionais

Expressões do tipo x = y ou **_equal**(x,y) e expressões do tipo x <> y ou **_unequal**(x,y), com x e y quaisquer objetos representam para o **MuPAD** uma *equação* e uma *inequação*, respectivamente. Os operadores = e <> são chamados .

Os e relacionais do aplicativo **MuPAD** são os seguintes:

Relacionais

<	menor que
<=	menor ou igual
>	maior que
>=	maior ou igual
=	igual
<>	diferente

Lógicos

and	e
or	ou
not	não

if cond **then** p **else** q **end_if**
se *cond* é TRUE (ou FALSE)
efetua p, caso contrário efetua q

OBS: TRUE significa verdadeiro e FALSE falso.

Resolvendo equações algébricas

Podemos resolver usando o seguinte comando:

solve(eq=0, var**)**

eq	- expressão polinomial
var	- identificador da variável de **eq**

O comando **solve** resolve a equação **eq=0** com relação a variável **var** e retorna um conjunto de soluções. A saída { } significa que não existe solução e a saída $\{x, x_2, x_3, ...\}$ significa que x_i (i= 1,2,3...) são as soluções.

O **MuPAD** pode resolver explicitamente equações polinomiais com grau menor ou igual a quatro. Para um grau maior podemos encontrar as soluções numericamente.

Exemplo 16

Resolva as seguintes equações:

a) $x^4 - 5x^2 + 5x - 2 = 0$

b) $x^5 - 4x + 2 = 0$

c) cos(x) - x = 0.

Soluções

a) digite: solve(x^4-5*x^2+5*x-2=0,x) pressione $<$ enter $>$

resposta: $\{1, -3^{1/2} - 1, -3^{1/2} - 1\}$

b) digite: solve(x^5-4*x+2=0,x) pressione $<$ enter $>$

resposta: {RootOf(2 -4*x + x^5)}

Obtermos as soluções numéricas da equação do item (b) usando o comando **float**.
digite: float(%) pressione $<$ enter $>$

resposta: {2.354013862, -2.354013862, 0.7357861545 I, - 0.7357861545 I}

c) digite: solve(cos(x) - x = 0,x) pressione $<$ enter $>$

resposta: solve(cos(x) - x = 0, x)

A equação anterior não possui solução explícita, mas podemos obter uma solução numérica do seguinte modo:
digite: float(%) pressione $<$ enter $>$

resposta: {0.7390851332}

Resolvendo equações transcendentes

Podemos resolver usando os seguintes comandos:

numeric::fsolve(eq=0, var)

numeric::fsolve(eq=0, var=a)

numeric::fsolve(eq=0, var=a..b)

eq - expressão transcendente

var - identificador da variável de **eq**

a, b - números reais

O comando **numeric::fsolve** é simplesmente a implementação do conhecido para o cálculo das raízes de equações e portanto precisa de uma informação inicial (*chute inicial*). Quando esta informação for omitida, o aplicativo assumirá um valor, que pode não ser o mais conveniente. Em geral, o *chute inicial* é a grande dificuldade do método. Porém, ainda temos a opção de informar um intervalo de busca.

Exemplo 17

a) Calcule uma raiz equação cos(x) = x.

b) Calcule uma raiz $x > 2$ da equação $e^{-x} = \sin(2\ x)$.

Soluções

a) digite: numeric::fsolve(cos(x)=x,x)   pressione < enter >

resposta: [x = 0.7390851333]

b) digite: numeric::fsolve(exp(-x)=sin(2*x),x=2.5..4)
pressione < enter >

resposta: [x = 3.162753511]

Resolvendo sistemas de equações

Sistemas de equações polinomiais podem ser resolvidos com o seguinte comando:

solve($\{eq_1, eq_2, ...\}$,$\{var_1, var_2, ...\}$, opt)

O comando **solve** resolve um **eq**$_i$ com relação as variáveis **var**$_i$ e retorna uma lista de soluções. Possui as seguintes opções :

BackSubstitution=TRUE: efetua uma substituição retroativa em cada lista de soluções.

MaxDegree=n: muda o grau da expansão polinomial.

podem ser resolvidos com os seguintes comandos:

numeric::fsolve($\{eq_1, eq_2, ...\}$,$\{x_1, x_2, ...\}$

numeric::fsolve($\{eq_1, eq_2, ...\}$,$\{x_1 = a, x_2 = b, ...\}$

Exemplo 18

Resolva os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x^2 + y & = & 2ay \\ x - y & = & 2bx \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 + y & = & 1 \\ x - y & = & 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 & = & sen(y) \\ y^2 & = & cos(x) \end{cases}$

Solução

a) digite: solve({x^2 + y=1,x - y = 2},{x,y}) pressione < enter >

resposta: $\left\{\left[x = -\frac{13^{1/2}}{2} - \frac{1}{2}, y = -\frac{13^{1/2}}{2} - \frac{5}{2}\right], \left[x = \frac{13^{1/2}}{2} - \frac{1}{2}, y = \frac{13^{1/2}}{2} - \frac{5}{2}\right]\right\}$

Podemos também resolver o sistema para uma das variáveis do seguinte modo:

digite: solve({x^2 + y = 1, x - y = 2}, [y, x], BackSubstitution = FALSE) pressione < enter >

resposta: $\left\{\left[y = x - 2, x = -\frac{13^{1/2}}{2} - \frac{1}{2}\right], \left[y = x - 2, x = \frac{13^{1/2}}{2} - \frac{1}{2}\right]\right\}$

b) digite: solve({x^2 + y= 2*a*y,x - y = 2*b*x},{x,y})
pressione < enter >

resposta: {[y = 0, x = 0], [y = 2 a + 4 b - 8 a b - 4 b + 8 a b - 1,
[x = 2 a + 2 b - 4 a b - 1]}

c) digite: solve({x^2 + y=1,x - y = 2},{x,y}) pressione < enter >

resposta: [y = 0.8116062152, x = 0.8517004887]

Exercícios

3.1 Resolva as seguintes equações algébricas:

a) $x^5 - 6 = 0$

b) $x^3 - 2x^2 - 3x + 10 = 0$

3.2 Resolva as seguintes equaçoes transcendentes:

a) 4 cos(x) - $e^{2x} = 0$

b) 1 - x ln(x) = 0

3.3 Considere f(x) = sen(x) - k x. Encontre dois valores de k para os quais f tem uma raíz positiva.

3.4 Resolva os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} 7x + 2y - 5z & = & -18 \\ x + 5y - 3z & = & -40 \\ 2x - y - 9z & = & -26 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x^3 - y^2 & = & 1 \\ xy^3 - y & = & 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} sen(x) + sen(y) & = & 0 \\ cos(x) + cos(y) & = & 0 \end{cases}$

Capítulo 4

Cálculo

Criando funções

Podemos também definir(criar) novas usando o operador $->$ (*sinal de menos e o sinal de maior*) do seguinte modo:

Exemplo 19

a) Defina a função $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$.

b) Calcule f(2).

c) Calcule f(x).

Solução

a) digite: f:=x $->$ x/(x+1) pressione $<$ enter $>$

resposta: x $->$ x/(x+1)

b) digite: f(2) pressione $<$ enter $>$

resposta: 2/3

c) digite: f(x) pressione $<$ enter $>$

resposta: $\dfrac{x}{x+1}$

Exemplo 20

a) Defina a função $g(x,y) = x^2 + y^2$.

b) Calcule g(x,y).

c) Calcule g(2,3).

Solução

a) digite: g:=(x,y)$->$ x^2+y^2 pressione $<$ enter $>$

resposta: (x,y)$->$ x^2+y^2

b) digite: g(x,y) pressione $<$ enter $>$

resposta: x^2+y^2

c) digite: g(2,3) pressione $<$ enter $>$

resposta: 13

Exemplo 21

a) Calcule a função composta f∘g(x) para $f(x) = x^3 - 1$ e $g(x) = sen(x)$.

b) Defina a função f(x) = $\begin{cases} e^x & \text{se} \quad x \geq 0 \\ x & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$

Solução

a) digite: f:=x^3-1: f(sin(x)) pressione $<$ enter $>$

resposta: $\sin(x)^3 - 1$

b) Pare definirmos uma usamos o comando

piecewise([cond$_1$, obj$_1$],[cond$_2$, obj$_2$], ...**)**

onde $cond_i$ são fórmulas lógicas e obj_i são objetos arbitrários do **MuPAD**.

digite: f := piecewise([x < 0, x], [x >= 0, exp(x)]):

Gráficos

Um dos mais importantes recursos computacionais do **MuPAD** é sua visualização gráfica. Nesta seção descreveremos os principais deste aplicativo.

Gráficos bidimensionais

Para desenharmos o gráfico de uma função $y = f(x)$ no intervalo [a, b] usamos o seguinte comando:

plotfunc2d(opt, f_1, f_2, ... , x=a..b**)**

f_i	-	expressões
x	-	identificador da variável x
a, b	-	números reais
opt	-	opções do comando

A interface gráfica do aplicativo **MuPAD** é uma segunda janela que surgirá logo após o comando gráfico ser executado.

Quando o **MuPAD** desenha um gráfico faz várias escolhas tais como: como desenhar os eixos, escolher uma escala para desenhar as funções, qual a cor das curvas, etc. Podemos alterar a visualização dos gráficos de acordo com o nosso interesse, incluindo opções no comando **plotfunc2d**. Destacaremos as mais usadas sendo que as demais podem ser obtidas através da janela **Ajuda** (Help) na barra de comandos do aplicativo.

Axes = Box   limitar o gráfico por um retângulo.

Axes = None   não desenhar os eixos.

ForeGround = [r,g,b]   definir as cores dos eixos.

r (red)	variação do vermelho entre 0 e 1
g (green)	variação do verde entre 0 e 1
b (blue)	variação do azul entre 0 e 1

Labels = ["x", "y"]   escrever textos nos eixos.

Exemplo 22

Desenhar o gráfico das seguintes funções:

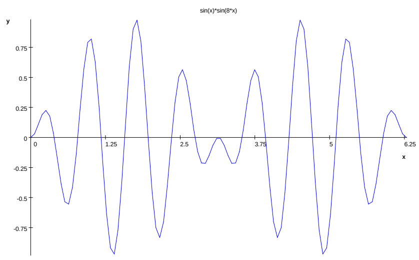
a) $f(x) = sen(x) * sen(8x)$ no intervalo $[0, 2\pi]$.

b) $f(x) = sen(x) * sen(8x)$, $g(x) = sen(x)$ e $h(x) = -sen(x)$ no intervalo $[0{,}2\pi]$ e no mesmo sistema de coordenadas com os eixos e sem os eixos.

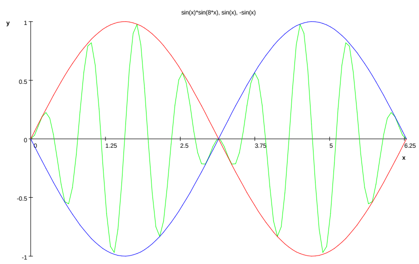
c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ no intervalo [-1, 1].

Soluções

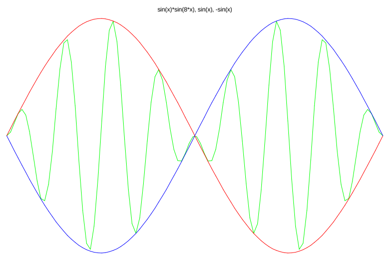
a) digite: plotfunc2d(sin(x)*sin(8*x),x = 0..2*PI)   pressione < enter >



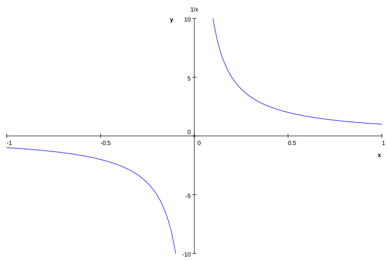
b) digite: plotfunc2d(sin(x)*sin(8*x), sin(x), -sin(x), x=0..2*PI)
pressione < enter >



digite: plotfunc2d(Axes=None, sin(x)*sin(8*x), sin(x), -sin(x), x=0..2*PI)
pressione < enter >



c) digite: plotfunc2d(1/x, x = -1..1)
pressione < enter >



Gráficos tridimensionais

Para desenharmos o gráfico da função $z = f(x, y)$ no domínio [a, b]×[c, d] usamos o seguintes comando:

plotfunc3d(opt, f_1, f_2..., x=a..b, y=c..d)

f_i	-	expressões
x, y	-	identificador das variáveis x e y
a, b, c, d	-	números reais
opt	-	opções do comando

As opções do comando **plotfunc3d** são as mesmas do comando **plotfunc2d**.

Exemplo 23

Desenhar o gráfico das seguintes funções:

a) $f(x, y) = sen(x^2 + y^2)$ no domínio [0,1]×[0,1]

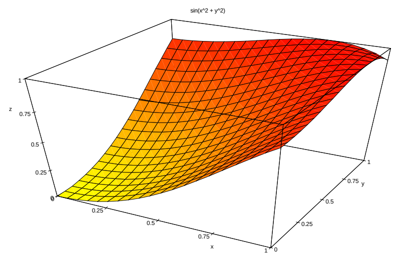
b) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

c) $f(x, y) = \begin{cases} -x^2 + 1 & \text{se} \quad x < y \\ 1 - y^2 & \text{se} \quad x >= y \end{cases}$

d) $f(x,y) = sen(x^2 + y^2)$ e $g(x,y) = cos(x^2 - y^2)$ no mesmo sistemas de coordenadas e sem boxe.

Soluções

a) digite: plotfunc3d(sin(x^2+y^2, x = 0..1, y=0..1)   pressione < enter >

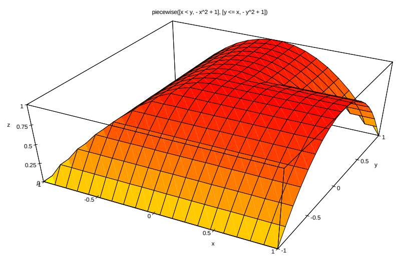


b) digite: plotfunc3d(sqrt(1-x^2+y^2), x=-1..1, y=-1..1)
pressione < enter >

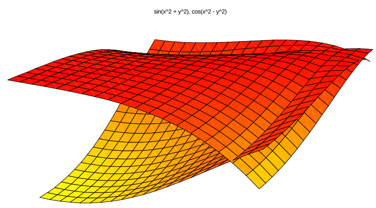
resposta: Error: Plot function(s) must return real numbers.
Type of the returned value is DOM_COMPLEX; during evaluation of 'plot3d'

Observe que o comando **plotfunc3d** não considera valores complexos.

c) digite: f :=piecewise([x < y, -x^2 + 1], [x >= y, 1 - y^2]):
pressione < enter >



d) digite: plotfunc3d(sin(x^2+y^2, cos(x^2-y^2, x = 0..1, y=0..1)
pressione < enter >



Limite

O cálculo de **Limites** é efetuado com os seguintes comandos:

limit(f(x), x=x$_0$**)**	$\lim\limits_{x \to x_0} \text{f(x)}$
limit(f(x), x = x$_0$, Left**)**	$\lim\limits_{x \to x_0^+} \text{f(x)}$
limit(f(x), x = x$_0$, Right**)**	$\lim\limits_{x \to x_0^-} \text{f(x)}$

Quando os são diferentes o aplicativo retorna a palavra **undefined**.

Quando $\mathbf{x}_0$ não é especificado o programa assume zero. Além disso, quando o não pode calcular o aplicativo retorna a expressão símbolica digitada na linha de comando anterior.

O comando **limit** usa expansão em série para efetuar os cálculos e retorna **FAIL** quando a ordem da expansão não foi suficiente. Neste caso, devemos aumentar a ordem da expansão usando o comando **ORDER** para que o limte possa ser calculado. Quando isto não é possível o programa retorna a palavra **unevalauted**.

Exemplo 24

Calcule os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos(x)}{x^2}$

b) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x}$

d) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x}$ e $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x}$

e) $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen(tg(x) - tg(sen(x)}}{x^7}$

Soluções

a) digite: limit(((1 - cos(x))/x^2,x) pressione < enter >

resposta: 1/2

b) digite: limit((1+1/n)^n,n=infinity) pressione < enter >

resposta: exp(1)

c) digite: limit(1/x,x) pressione < enter >

resposta: undefined

d) digite: limit(1/x,x=0, Right), limit(1/x,x=0, Left)
pressione < enter >

resposta: -infinity, infinity

e) digite: limit((sin(tan(x)) - tan(sin(x)))/x ^7,x) pressione < enter >

resposta: Warning: ORDER seems to be not big enough for series computation [stdlib:: limit::lterm]

FAIL

Note que no exemplo acima o aplicativo *sugere* que a ordem da série seja alterada para encontrar o limite. Vamos aceitar a sugestão efetuando o seguinte comando:

digite: ORDER::8 : limit((sin(tan(x)) - tan(sin(x)))/x ^7,x)
pressione < enter >

resposta: -1/30

Derivada

Podemos calcularmos a usamos os seguintes comandos:

diff(f(x), x) ou f'(x)	primeira derivada de f(x)
diff(**diff**(f(x), x),x) ou f''(x)	segunda derivada de f(x)
diff(f(x, y), x)	derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}$
diff(f(x, y), y)	derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}$
diff(**diff**(f(x, y), x),x)	derivada parcial $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$
diff(**diff**(f(x, y), y),y)	derivada parcial $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$
diff(**diff**(f(x, y), x),y)	derivada parcial $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$
D(f)	operador derivada

Observe que para obtermos as derivadas de ordem superior aplicamos sucessivamente o comando **diff**.

Exemplo 25

a) Seja f(x) $= \frac{1}{sen(x)}$. Calcule f'(x). Desenhe os gráficos de f(x) e f'(x) no mesmo sistemas de coordenadas.

b) Seja f(x,y) = y cos(x)^2. Calcule $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

c) Calcule simbolicamente a derivada da soma, do produto e do quociente de duas funções.

Soluções

a) digite: diff(1/sin(x),x), diff(diff(1/sin(x),x),x) pressione < enter >

resposta: $-\frac{\cos(x)}{\sin(x)\hat{}2}, \frac{1}{sin(x)} + \frac{2\,cos(x)\hat{}2}{sin(x)\hat{}3}$

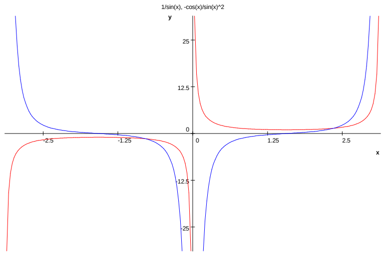
digite: f:=x− >diff(1/sin(x),x) pressione < enter >

resposta: x− >diff(1/sin(x),x)

digite: df:=x− >diff(diff(1/sin(x),x),x) pressione < enter >

resposta: x− >diff(diff(1/sin(x),x),x)

digite: plotfunc2d(f(x),df(x), x=-PI..PI) pressione < enter >



b) digite: simplify(diff(diff(y*cos(x)^2,x),x) pressione < enter >

resposta: -2 y cos(2 x)

digite: simplify(diff(diff(y*cos(x)^2,x),y) pressione < enter >

resposta: -2 sin(2 x)

c) digite: delete f , delete g

digite: D(f(x)+g(x) pressione < enter >

resposta: D(f(x))+ D(g(x))

digite: D(f(x)*g(x) pressione < enter >

resposta: f(x) D(g(x)) + g(x) D(f(x))

digite: D(f(x)/g(x) pressione < enter >

resposta: $\dfrac{D(f(x))}{g(x)} - \dfrac{f(x)D(g(x))}{g(x)^2}$

Integral Definida e Indefinida

Para calcularmos a de uma função f(x) usamos os seguintes comandos:

int(f, x)	$\int f(x)\,dx$
int(f, x=a..b)	$\int_a^b f(x)\,dx$

O comando **int** calcula a da função f(x) em termos das funções elementares.

Exemplo 26

Calcule as seguintes integrais:

a) $\displaystyle\int_0^1 xsen(x)\,dx$

b) $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$

c) $\displaystyle\int x^m\,dx$

d) Verifique o Teorema Fundamental do Cálculo, isto é, se F(x) = $\displaystyle\int_a^x f(x)\,dx$ então F'(x) = $f(x)$, para qualquer função contínua $f(x)$.

Soluções

a) digite: int(x*sin(x), x=0..1) pressione $<$ enter $>$

resposta: sin(1) - cos(1)

b) digite: int(sqrt(1-x^2), x=0..1) pressione $<$ enter $>$

resposta: $\frac{\text{PI}}{2}$

c) digite: int(x^m, x) pressione $<$ enter $>$

resposta: $\frac{xx^m}{m+1}$

d) digite: F:= x$-$ $>$int(f(s), s=a..x): pressione $<$ enter $>$

digite: diff(F(x),x) pressione $<$ enter $>$

resposta: f(x)

Equações Diferenciais Ordinárias

Para resolvermos do tipo F(x, y(x), y'(x), y"(x), ...) = 0 usamos o seguinte comando:

solve(ode(eq, y(x)**)**

eq - F(x, y(x), y'(x), y"(x), ...) = 0

y - identificador da incógnita

x - identificador da variável

O comando **ode(**eq, y(x)**)** representa uma equação diferencial ordinária cuja incógnita é a função y(x). O aplicativo encontrará (se possível) uma solução da equação diferencial quando aplicarmos o comando **solve** ao comando **ode**. Se houver solução o comando **solve** retornará um conjunto de soluções ou uma solução implícita.

Exemplo 27

Resolva a equação diferencial y'(x) = y(x) cos(x)

Soluções

a) digite: eq:= solve(ode(y'(x) = y(x)*cos(x), y(x)))
pressione < enter >

resposta: {C1 exp(sin(x))}

Exemplo 28

Considere a seguinte equação diferencial $y'(x) = \dfrac{x}{y}$.

a) Obter a solução geral desta equação.

b) Obter as solução para as constantes 0, 1, 2, 3.

c) Desenhar os gráficos das soluções encontradas no item (b) no mesmo sistema de coordenadas.

Soluções

a) digite: eq1:= solve(ode(y'(x) = x/y(x), y(x)))
pressione < enter >

resposta: $\left\{\left(2C1 + x^2\right)^{1/2}, -\left(2C1 + x^2\right)^{1/2}\right\}$

Observe que o aplicativo considere um *conjunto* de soluções.

b) Para variarmos a contante $C1$, vamos definir as soluções da equação em termos deste parâmetro. Como existem duas famílias de soluções vamos denominar por *solpos* e *solneg* as soluções positivas e negativas, respectivamente.

digite: solneg:=C1− >op(eq1,1) pressione < enter >

resposta: C1− >op(eq1, 1)

digite: solpos:=C1− >op(eq1,2) pressione < enter >

resposta: C1− >op(eq1, 2)
Agora vamos variar o parâmtro C1 usando os comandos **subs** e **$**.

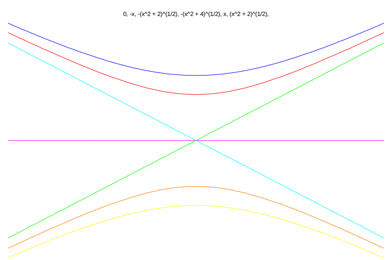
digite: listapos:=[subs(solpos(C1), C1=i)$ i=0..3]
pressione < enter >

resposta: $[(x^2)^{1/2}, (x^2 + 2)^{1/2}, (x^2 + 4)^{1/2}, (x^2 + 6)^{1/2}]$

digite: listaneg:=[subs(solneg(C1), C1=i)$ i=0..3] pressione < enter >

resposta: $[-(x^2)^{1/2}, -(x^2+2)^{1/2}, -(x^2+4)^{1/2}, -(x^2+6)^{1/2}]$

c) digite: plotfunc2d(Axes=None, 0, op(listaneg, i)$ i=1..3, op(listapos, i)$ i=1..3, x=-3..3)
pressione < enter >



Sistema de Equações Diferenciais

Para resolvermos um usamos o seguinte comando:

solve(ode({eq$_1$, eq$_2$,...}, {y$_1$(x), y$_2$(x),...})

eq$_i$ - equações diferenciais

y$_i$ - identificadores das incógnitas

x - identificador da variável

Exemplo 29

Resolva o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} x'(t) &= y(t) \\ y'(t) &= x(t) \end{cases}$$

Soluções

a) digite: sys:= ode({x'(t)=y(t), y'(t)=x(t)}, {x(t), y(t)})

digite: solve(sys)

pressione < enter >

resposta: {[y(t) = C1 exp(t) + C2 exp(-t), x(t) = C1 exp(t) - C2 exp(-t)]}

Problema de Valor Inicial

Para resolvermos um (PVI) do tipo

$$\begin{cases} F(x, y'(x), y''(x), ...) & = & 0 \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ .... \end{cases}$$

usamos o comando **solve(ode())** para sistemas de equações diferenciais introduzindo as condições iniciais como equações do seguinte modo:

Exemplo 30

Resolva o seguinte PVI $\begin{cases} y'(x) & = 4x^3y(x) - y(x) \\ y(1) & = 3 \end{cases}$

Soluções

a) digite: solve(ode({y'(x)=4*x^3*y(x), y(1)=3,}, y(x)))

pressione < enter >

resposta: {3 exp(-1) exp(x^4)}

Bibliografia

[1] *The MuPad Tutorial*

[2] L.O. Brandão e C.J. Watanabe, *U*ma introdução ao MUPAD, Laboratório de Ensino de Matemática - USP, 1997.

[3] N. Blachman, *M*athematica: uma abordagem prática, Prentice-Hall do Brasil, 1992.

[4] W.E.Baylis, *T*heorical Methods in the Physical Sciences: an introduction to problem solving using MAPLE V, Birkhauser, 1994.

[5] H. Cassago, *M*athematica, São Carlos, 1997.

[6] G. Oevel e G. Siek, *C*omputer Algebra in Education, University of Paderborn, 1994.

[7] F. Postel e P.Zimmermann, *A* review of the ODE solvers of AXIOM, DERIVE, MACSYMA, MAPLE, MATHEMATICA, MUPAD and REDUCE, Workshop on Computer Algebra, 1996.

[8] A.R. dos Santos e W. Bianchini, *A*prendendo Cálculo com MAPLE, IM-UFRJ, 2000.

[9] V. Trevisan, *C*omputação Algébrica e Simbólica, SBMAC, 1992.

[10] C. Vaz, *A*prendendo o Aplicativo Mathematica, CCEN-UFPa, 2001.